Profesorado en Física, Licenciatura en Física y Astronomía

Física General II

Guía N°9: Teoría Cinética de los Gases

Problema 1: Calcular el número de moléculas por unidad de volumen en un gas ideal a 300 K y a una atmósfera estándar (presión normal $1{,}01325 \times 10^5\,\mathrm{N/m^2}$). ¿Cuántas moléculas contiene un volumen cúbico de 1 mm de arista en estas condiciones? ¿Qué fracción del número de Avogadro representa esta cantidad? Valores de tabla: $k_B = 1{,}3806503 \times 10^{-23}\,\mathrm{J/K}$, $N_A = 6{,}022142 \times 10^{23}$.

Problema 2: Usando el Principio de Equipartición, considerando sólo los grados de libertad de traslación y que el peso molecular medio del aire es 29 uma, calcular la velocidad cuadrática media, v_{rms}, de una molécula de aire a 300 K. ¿Cuántos impactos moleculares recibe por segundo un centímetro cuadrado de una superficie expuesta al aire a presión atmosférica normal y 300 K?

Problema 3: Considerar un gas de moléculas de oxígeno a $T = 300\,\mathrm{K}$.

a) ¿Cuál es la energía cinética traslacional promedio de una molécula?

b) ¿Cuál es la velocidad cuadrática media molecular?

c) ¿Cuántas moléculas por unidad de volumen, que viajan a esa velocidad son necesarias para producir una presión promedio de 1 atm? Comparar este resultado con el número de moléculas de oxígeno por unidad de volumen, contenidas en un recipiente a presión atmosférica estándar. Explicar la diferencia.

Problema 4: Calcular la velocidad media y la velocidad cuadrática media para los siguientes grupos de seis partículas:

a) Las 6 tienen velocidad igual a 10 m/s;

b) 3 de ellas tienen velocidad igual a 5 m/s y las restantes 3 velocidad igual a 10 m/s;

c) 3 de ellas tienen velocidad igual a 10 m/s mientras que las restantes están en reposo.

Problema 5: Considerar un gas ideal bidimensional, de manera tal que la ecuación de estado correspondiente resulta $p = n\,k_B\,T$, donde p tiene unidades de fuerza por unidad de longitud y n número de moléculas por unidad de superficie. Usando el principio de equipartición de la energía, calcular:

a) el calor específico molar a superficie constante de un gas monoatómico.

b) el calor específico molar a superficie constante de un gas diatómico.

c) el calor específico molar a presión constante de los gases mono y diatómicos.

Problema 6: La ley de Dalton de las presiones parciales enuncia que la presión de una mezcla de gases es igual a la suma de las presiones parciales de cada uno de los gases de la mezcla por separado. Demostrar la ley de Dalton a partir de la teoría cinética de los gases.

Problema 7: La ley de distribución de velocidades de Maxwell-Boltzmann expresa que la fracción de moléculas con velocidades en el intervalo $(v, v + dv)$ es $f(v)\,dv$, siendo

$$f(v) = C\,v^2 \exp\left(-\frac{m\,v^2}{2\,k_B\,T}\right),$$

donde C es una constante.

a) Calcular los puntos críticos de la función $f(v)$, calcular la posición del máximo, evaluar su valor máximo, estudiar su comportamiento asintótico para $v \to \infty$ y graficar esta función.

Utilizando la expresión,

$$v_0 = \sqrt{\frac{2\,k_B\,T}{m}},$$

correspondiente a la posición del máximo de la distribución, esta puede re-escribirse según:

$$f(v) = D\,\frac{v^2}{v_0^3}\exp\left(-\left(\frac{v}{v_0}\right)^2\right).$$

b) Usando la condición de normalización, $\int_0^\infty f(v)\,dv = 1$, verificar que la constante $D = \dfrac{4}{\sqrt{\pi}}$.

c) Calcular la velocidad media $\overline{v} = \int_0^\infty v\,f(v)\,dv$ y la velocidad cuadrática media $v_{\mathrm{rms}} = \sqrt{\overline{v^2}}$, donde $\overline{v^2} = \int_0^\infty v^2\,f(v)\,dv$.

d) Calcular, con el auxilio de una tabla de integrales, la fracción de moléculas cuyas celeridades están en el intervalo $(0, v_{\mathrm{rms}})$ y la fracción de aquellas que están en el intervalo $(v_{\mathrm{rms}}, \infty)$.

e) Considerar dos gases distintos a igual temperatura; ¿cuál es la relación entre sus velocidades cuadráticas medias?

Para el cálculo de las integrales que involucran la función distribución de velocidades es útil el siguiente resultado

$$\int_0^\infty x^\alpha \exp(-x^2)\,dx = \frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right),$$

donde la función Gamma satisface las siguientes propiedades:

$$\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z), \qquad \Gamma(1) = 1, \qquad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Problema 8: La velocidad del sonido en el aire a 27^oC es aproximadamente igual a $330\,\mathrm{m/s}$. Comparar esta velocidad con la velocidad cuadrática media de una molécula de nitrógeno a la misma temperatura.

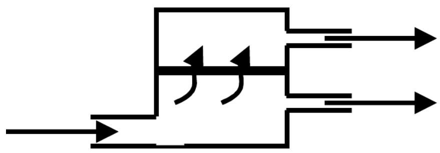
Problema 9: Un recipiente de 45 litros de capacidad, que tiene un pequeño orificio practicado en uno de sus laterales, contiene una mezcla inicialmente en partes iguales de gases de oxígeno molecular y helio con 10^{-3} moles de cada uno de ellos. Los gases escapan a través del orificio a una cámara exterior, de volumen a todo fin práctico infinito, en la que se ha practicado el vacío. Determinar la composición inicial del haz molecular cuando sale del recipiente, es decir, el cociente entre los números de moléculas de helio y de oxígeno que escapan por segundo. ¿Qué tamaño debería tener el orificio para que el tiempo de relajación (tiempo necesario para que la cantidad de gas se reduzca en $1/e$) del helio sea 20 minutos? El experimento se realiza a temperatura constante igual a 27^oC.

Problema 10: Un recipiente de volumen V, que tiene un pequeño orificio de área A practicado en uno de sus laterales, contiene n moles de gas diatómico. El gas escapa a través del orificio a un recipiente de igual volumen (V) en el que se ha practicado el vacío.

a) Escribir las ecuaciones correspondientes al número de moléculas N_1 en el primer recipiente, inicialmente lleno, y N_2 en el segundo recipiente, inicialmente vacío.

b) Proponer soluciones $N_1(t)$ y $N_2(t)$ para dichas ecuaciones. Discutir el comportamiento para tiempos suficientemente largos.

Problema 11: Un método para separar los isótopos de un elemento químico es la *difusión en fase gaseosa* a través de una membrana o tabique poroso. El método consiste, primero, en preparar un compuesto químico que contiene un único átomo del elemento deseado por molécula.



En principio las moléculas del compuesto difieren entre si sólo en el isótopo del elemento que la integra. Los isótopos al tener el mismo número atómico, poseen las mismas propiedades químicas, pero difieren entre sí en la masa. Luego, se genera la fase gaseosa del compuesto, usualmente disminuyendo la presión, y se permite la difusión del gas a través de un medio poroso, en el cual el tamaño de los poros es pequeño en comparación con la longitud del camino libre medio de las moléculas. El dispositivo empleado se esquematiza en la figura. El gas que ha pasado por el tabique poroso, ha aumentado el contenido porcentual del isótopo ligero, es aspirado permanentemente y alimenta a la siguiente célula. De esta manera, el proceso se repite muchas veces.

Un ejemplo de aplicación del método es su uso para el enriquecimiento de uranio, el cual se encuentra en forma natural con una alta proporción de ^{238}U y una muy baja de ^{235}U, la cual es útil en la industria nuclear. El compuesto empleado en fase gaseosa es el hexafluoruro de uranio UF_6, el cual es el gas más pesado conocido.

¿Qué cantidad de ciclos hay que realizar para que la razón entre las concentraciones de los isótopos ligero y pesado aumente 10 veces si las masas molares de los compuestos de los isótopos ligero y pesado son iguales a μ_1 y μ_2 respectivamente? Aplicar el resultado al caso del uranio.