Facultad de Matemática, Astronomía y Física

Universidad Nacional de Córdoba

Introducción a la Física

Guía N°2

Problema 1:

a) Expresar en radianes los siguientes ángulos dados en grados sexagesimales:

$$\alpha = 35^\circ \qquad \beta = 245^\circ 36' 3''$$

b) Expresar en grados, minutos y segundos sexagesimales:

$$\alpha = 2 \; radianes \qquad \beta = \tfrac{6}{5}\pi \; radianes$$

Problema 2: Utilizando la circunferencia trigonométrica graficar las siguientes funciones: tangente, cotangente, secante y cosecante en el intervalo $[0, 2\pi]$.

Problema 3: Conociendo que $\operatorname{sen} \alpha = b$ y que α se encuentra en el segundo cuadrante, calcule el valor de las restantes funciones trigonométricas de α en términos de b.

Problema 4: Demostrar que:

$$\textbf{a)}\ \operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = 2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\textbf{b)}\ \cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

Problema 5: Demostrar que:

$$\textbf{a)}\ \cos\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} \qquad \textbf{b)}\ \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} \qquad \textbf{c)}\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1-\operatorname{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

Discrimine según el cuadrantre al cual pertenece α, cuál signo de la raiz cuadrada se aplica en a) y b).

Problema 6: Resolver gráficamente la ecuación: $\operatorname{sen} x = \cos x$. Encuentre una expresión general para los valores de x que son soluciones de la ecuación anterior.

Problema 7: Encuentre los valores de x para los cuales: $\operatorname{sen} x = \dfrac{x}{4\pi} - 1$.

Problema 8: Resolver la siguiente ecuación trascendente: $\operatorname{tg} x - sec\, x = 1$.

Problema 9: Una torre proyecta una sombra de $50\,\mathrm{m}$ cuando el sol está a $45°$ sobre el horizonte. Calcular la altura de la torre.

Problema 10: A $35\,\mathrm{m}$ del eje del obelisco de la ciudad de Buenos Aires se sitúa un operador con un teodolito, quien encuentra que el ángulo sustendido por el obelisco es de $61°11'$. Calcule la altura del obelisco teniendo en cuenta que el instrumento está a $1,4\,\mathrm{m}$ del suelo.

Problema 11: Desde el espejo de un faro marino situado a $250\,\mathrm{m}$ sobre el nivel del mar se observa un bote bajo un ángulo de depresión de $30°$. Calcule la distancia horizontal entre el bote y el faro.

Problema 12: Dos observadores en tierra, separados por una distancia de $1000\,\mathrm{m}$, observan un globo aerostático que se encuentra elevado entre ellos. Ambos observadores y el globo se hallan en un mismo plano vertical. Uno de los observadores mide un ángulo de elevación de $65°$ y el otro mide $35°$. Calcule la altura a la que se encuentra el globo.

Problema 13: Considere los polígonos regulares de n lados inscriptos en un circunferencia de radio R.

a) Verifique que el perímetro de dichos polígonos puede expresarse como:

$$P(n) = 2\, n\, R \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

b) Verifique que el área encerrada por dichos polígonos puede expresarse como:

$$A(n) = n\, R^2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right) \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

c) Grafique las funciones $P(n)$ y $A(n)$ para n = 3, 4, 5, 6 y 12 (considere $R = 1\,\mathrm{cm}$).

d) Teniendo en cuenta el límite notable $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$, encuentre los límites de las sucesiones $P(n)$ y $A(n)$. Interprete geométricamente estos resultados.

e) Encuentre el límite de la sucesión $a_n = \dfrac{A(n)}{P(n)}$ y compare con el correspondiente cociente entre el área y el perímetro del círculo.

Problema 14: Derivar aplicando la definición las siguientes funciones:

a) $f(x) = 2\,x - 1$ **b)** $f(x) = x^3 + b$ **c)** $f(x) = \dfrac{x^2 + a}{x}$

Problema 15: Derive las siguientes funciones:

$$
\begin{array}{llll}
\mathbf{a}) \; f(x) = a\,x^2 + b\,x + c & \mathbf{b}) \; f(x) = x^3 - 2\,x & \mathbf{c}) \; f(x) = \dfrac{bx}{x+a} + c\,x^2 \\
\mathbf{d}) \; f(x) = \ln(\operatorname{sen} x^2) & \mathbf{e}) \; f(x) = (a^2 - x^2)^{1/2} & \mathbf{f}) \; f(x) = \ln\left(\dfrac{x\,e^x}{\sqrt{1-x^2}}\right) \\
\mathbf{g}) \; f(x) = x^2 (x+b)^{-1/2} & \mathbf{h}) \; f(x) = \operatorname{sen}\left(2\,x^2\right) & \mathbf{i}) \; f(x) = \operatorname{tg} x \\
\mathbf{j}) \; f(x) = x^3\,x^{1/2} & \mathbf{k}) \; f(x) = \sec(x)\,\operatorname{sen}(2x) & \mathbf{l}) \; f(x) = \dfrac{x^2+a}{\operatorname{tg}(x^2+a)}
\end{array}
$$

Problema 16: Encontrar los puntos críticos de las siguientes funciones y determinar si son máximos, mínimos o puntos de inflexión. Graficar.

$$
\begin{array}{lll}
\mathbf{a}) \; f(x) = \dfrac{x^2}{2} - 4\,x + 9 & \mathbf{b}) \; f(x) = \dfrac{x}{x^2+a} & \mathbf{c}) \; f(x) = x^n, \quad n \; \textit{natural} \\
\mathbf{d}) \; f(x) = x^4 + x^3 & \mathbf{e}) \; f(x) = x + \dfrac{1}{x} & \mathbf{f}) \; f(x) = (x+3)^2\,(x-5) \\
\mathbf{g}) \; f(x) = \dfrac{4\,(4\,x+1) - x^2}{13x^3} & &
\end{array}
$$

Problema 17: Determinar la función cuadrática $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$, tal que se anula para $x = 3$ y $x = 7$ y tiene un mínimo en x_0 tal que $f(x_0) = -8$.

Problema 18: Estudie la función:

$$y(x) = \frac{T\,x - 1}{x^2} + \frac{1}{3\,x^3}$$

para $x > 0$.

Considerando distintas posibilidades para el valor del parámetro T. En particular:

a) $0 < T < \frac{3}{4}$ **b)** $\frac{3}{4} \leq T < 1$ **c)** $T > 1$.

Grafique la función en cada uno de estos casos.

Problema 19: ¿Cuál es el área máxima que puede encerrar un rectángulo de perímetro P?

Problema 20: Determinar el rectángulo inscripto en la elipse de semiejes a y b de lados paralelos a los ejes y de área máxima.

Problema 21: Se quiere construir una caja sin tapa con una hoja de cartón de 10 cm x 80 cm. ¿Cuáles serán las dimensiones de la caja para que tenga capacidad máxima?.

Problema 22: Sea la función $y(x) = 3\,x^2 + 2\,x - 8$. Calcular la diferencia entre Δy y dy en $x = x_o$.

Problema 23: ¿Cuál debe ser la longitud de un hilo que rodee la Tierra por una circunferencia máxima?. Si repetimos la operación de manera tal que exista 1 cm entre el hilo y la Tierra, cuánto debemos aumentar la longitud del hilo?. Utilice diferenciales para el cálculo y compare con el valor exacto de variación de la longitud.

Problema 24: Suponga que se quiere rodear la Tierra con una esfera metálica de forma tal que exista entre ambas una capa de aire de 1 cm de espesor. ¿Cuánto más grande debe ser la superficie de la esfera respecto de la superficie de la Tierra?. ¿Y su volumen?. Utilice diferenciales para el cálculo y compare con los valores exactos de la variación de la superficie y el volumen. (Radio de la Tierra: 6400 Km).

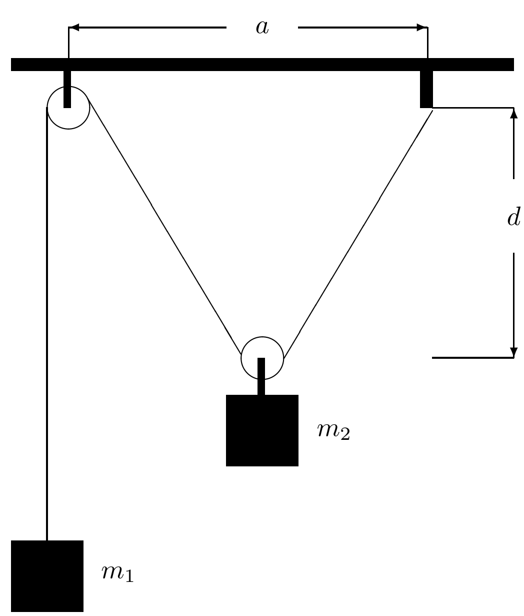
Problema 25: La medida del diámetro de un círculo es $d = 13{,}8\,\text{cm}$, con un error por defecto menor que $0{,}1\,\text{cm}$. Calcular mediante la diferencial el error cometido en la determinación de la superficie.

$$S = \frac{\pi}{4}d^2$$

Comparar con el valor exacto de ΔS.

Problema 26: Demostrar que el error relativo cometido en la determinación del área S de un círculo es igual al doble del error relativo del radio r (se define como error relativo de una magnitud M al cociente dM/M).
Compare dS con el valor exacto de ΔS para $\dfrac{dr}{r} = 0{,}01$ y $r = 10$.

Problema 27: La figura muestra un sistema compuesto por las masas m_1 y m_2 las cuales se hallan suspendidas de forma tal que mientras m_1 está atada a un extremo de la cuerda, m_2 está colgada del eje de la polea la cual puede deslizar libremente sobre la cuerda. La longitud total de la cuerda es $L = 15\,\text{m}$, $a = 60\,\text{cm}$ y $d = 70\,\text{cm}$. Los radios de ambas poleas son despreciables frente a las dimensiones de a y d.



a) Si la masa m_1 se desplaza 1 cm hacia abajo, hallar el desplazamiento de la masa m_2 utilizando la diferencial. No utilice calculadora. Compare con el desplazamiento exacto ocurrido.

b) Suponiendo que m_1 se desplaza con velocidad v, calcule la velocidad de la masa m_2.

Problema 28: Considere la siguiente función de movimiento de un cuerpo:

$$x(t) = t^2 - 3\,t\ ,$$

donde $[x] = \mathrm{m}$ y $[t] = \mathrm{s}$.

a) Graficar la función $x(t)$.

b) Determinar analíticamente en todos los casos y gráficamente en los siete primeros, los valores de $\bar{v}$ (velocidad media del móvil) en los siguientes intervalos de tiempo expresados en segundos: $[-1, 5]$, $[-1, 4]$, $[-1, 2]$, $[-1, 1]$, $[-1, -0{,}5]$, $[-1, -0{,}8]$, $[-1, -0{,}9]$, $[-1, -0{,}99]$, $[-1, -0{,}999]$ y $[-1, -0{,}9999]$.

c) Sea $\Delta t_n = t_n - t_0$, con $t_0 = -1\,\mathrm{s}$ y $t_1 = 5\,\mathrm{s}$, $t_2 = 4\,\mathrm{s}$, $\cdots$, $t_{10} = -0{,}9999\,\mathrm{s}$. A medida que Δt_n se hace más pequeño, a qué valor se aproxima la velocidad media del móvil en el intervalo $[-1, -1 + \Delta t_n]\,\mathrm{s}$?. ¿Cómo se interpreta geométricamente este resultado?.

d) Encuentre la ecuación de la recta tangente a la función $x(t)$ en $t = -1\,\mathrm{s}$.

Problema 29: Las coordenadas de dos móviles están dadas en función del tiempo por:

$$x_1 = -t^2 + 3\,t \qquad\qquad x_2 = \frac{8}{3}t + 4$$

Hallar la mínima distancia que separa a los móviles y el instante en el que están en esa situación.
Graficar: $x_1(t) - x_2(t)$ y $d(t) = |x_1(t) - x_2(t)|$

Problema 30: Sabiendo que las funciones de movimiento de los móviles A y B son respectivamente:

$$x_A(t) = \frac{1}{2}t^2 + 2 \qquad\qquad x_B(t) = \frac{3}{2}t - 2$$

a) Calcule la distancia mínima que los separa y el instante de tiempo t_m en que esto se produce.

b) Calcule $\bar{v}_A$ y $\bar{v}_B$ entre 0 y t_m.

c) Calcule $v_A(t_m)$ y $v_B(t_m)$.