Facultad de Matemática, Astronomía y Física

Universidad Nacional de Córdoba

Modelos y Simulación – Licenciatura en Computación

Práctico Especial 2002: I. Problema de Simulación con Opciones

• Introducción a las Opciones

Una opción otorga el derecho, sin generar la obligación a su tenedor, de comprar o vender un activo financiero (por ejemplo una acción, un bono, un commodity, monedas, etc.) bajo términos específicos. Una opción "call" es aquella que da el derecho de comprar y una opción "put" es una que da el derecho de vender una acción. Ambos tipos de opciones tienen un precio estipulado por acción o "strike" para la operación de compra o venta y un tiempo de ejercicio explícito. Además, existen dos condiciones estándar bajo las cuales operan las opciones: Opciones "Europeas" son aquellas que sólo pueden realizarse al cabo del tiempo de ejercicio, mientras que las opciones "Americanas" pueden utilizarse en cualquier momento hasta el tiempo de ejercicio. De esta manera, una opción "call" Europea con precio "strike" K y tiempo de ejercicio T le otorga a su poseedor el derecho de comprar al tiempo T una acción al precio K, mientras que una opción "put" Americana da a su tenedor el derecho de realizar la venta de una acción en cualquier instante de tiempo $t \leq T$ por el precio "strike". Las opciones permiten a los inversiores manejar el riesgo de una cartera de acciones, pero lógicamemnte tienen un costo. Este último es en definitiva el riesgo de pérdida que asume el invesor tenedor de la opción.

• Movimiento Browniano Geométrico

Un modelo usual para simular la evolución del precio de una acción en el tiempo es el llamado movimiento Browniano geométrico. Este proceso asume que si $S(y)$ es el precio de la acción en el tiempo y, entonces el cociente entre precio de la acción en un futuro instante de tiempo $y + t$ y $S(t)$ es una variable aleatoria *lognormal*, independientemente de la historia de los precios trancurrida hasta el instante y. Esto es, dado $y \geq 0$

$$\log\left(\frac{S(y+t)}{S(y)}\right)$$

es una variable aletoria normal con media $\mu\, t$ y varianza $\sigma^2\, t$.

Ejercicio 1: Una variable aleatoria Y se llama *lognormal* con parámetros (μ, σ), si $\log(Y)$ es una variable aleatoria normal com media μ y varianza σ^2.

a) Demostrar que: $E[Y] = \exp\left(\mu + \dfrac{\sigma^2}{2}\right)$.

b) Calcular $\mathrm{Var}[Y]$.

Ejercicio 2: Construir un generador para la variable aletoria Y *lognormal* con parámetros (μ, σ). Implementar el algoritmo en la computadora y estimar $E[Y]$ y $\mathrm{Var}[Y]$. Asumir los valores $\mu = 1/2$, $\sigma^2 = 1$, y construir una tabla con las estimaciones de los valores pedidos para 100, 1000, 10000, 100000 y 1000000 simulaciones.

Una variable aletoria normal puede tomar valores positivos o negativos con igual probabilidad. El movimiento Browniano geométrico, dado que considera que el "logaritmo" del cociente de precios es una variable normal, garantiza que los precios sólo puedan tomar valores positivos. Además al ser las razones de precios, separados por un período de tiempo fijo t, las que tienen distribución normal, resulta que el porcentaje de cambio en el precio no depende del precio actual y, pero los cambios de precio absolutos si resultan ser proporcionales al precio de referencia: $S(y+t) = S(y)\, e^N$, donde N es una variable aleatoria normal de parámetros $(\mu\, t, \sigma^2\, t)$. Sin embargo, debe notarse que si los parámetros del modelo μ y σ están determinados, ninguna otra información es necesaria para determinar los precios futuros a partir del precio presente; la información sobre los precios pasados es irrelevante. Es precisamente este hecho, el que limita la aplicación del movimiento Browniano geométrico en situciones prácticas reales.

Ejercicio 3: Considerar un movimiento Browniano geométrico con parámetros (μ, σ). Sea $S(0) = s_0$ el valor inicial del proceso.
a) Mostrar que: $E[S(t)] = s_0 \, \exp \left[t \left(\mu + \dfrac{\sigma^2}{2} \right) \right]$.
b) Calcular $\mathrm{Var}[S(t)]$.

Ejercicio 4: Construir un generador para el movimiento Browniano geométrico $S(t)$ con parámetros (μ, σ). Para tiempos discretos se tiene que $S(t+1) = e^N S(t)$, donde N es una variable aleatoria normal de parámetros (μ, σ^2). Implementar el algoritmo en la computadora y graficar dos realizaciones del proceso (los 100 primeros pasos) correspondientes a los valores de los parámetros: $(\mu = -0.06,\ \sigma = 0.3)$ y $(\mu = -0.1,\ \sigma = 0.3)$ y considerando $S(0) = 100$. Utilizar para ambas realizaciones del proceso la misma semilla en el generador de números aleatorios.

• Arbitraje

Un esquema de apuestas, que involucra la compra y/o venta de acciones y opciones, que da lugar a una ganancia segura se denomina *arbitraje*. Los costos de las opciones se fijan de manera de eliminar el arbitraje. Bajo la hipótesis de que los precios de las acciones siguen un movimiento Browniano geométrico, Black y Scholes dedujeron el 1973 una fórmula para fijar el precio de las opciones "call", asociadas a una dada acción, de forma de evitar el arbitraje. La fórmula de Black-Scholes fija el costo C de la opción "call" en función del tiempo y depende de la tasa de interés del mercado r, el precio inicial de la acción $S(0)$, el precio de ejercicio de la opción K y del parámetro σ del movimiento Browniano geométrico (llamado tambien parámetro de volatilidad), pero no depende del parámetro μ. La fórmula de Black-Scholes, cuya demostración excede las intenciones del práctico, establece que:

$$C(t) = S(0)\ \Phi(\omega(t)) - K\, e^{-r\,t}\ \Phi\left(\omega(t) - \sigma\sqrt{t}\right)\ ,$$

donde

$$\omega(t) = \frac{r\,t + \sigma^2\,t/2 - \log(K/S(0))}{\sigma\sqrt{t}}$$

y $\Phi(x)$ es la distribución de probabilidad acumulada de la variable normal estándar. Naturalmente, en el lanzamiento de la opción ($t = 0$) se tiene que $K \leq S(0)$, siendo la igualdad el caso habitual. Los valores límites del costo de la opción, que resultan de la expresión dada, son: $C(t = 0) = S(0) - K$ y $C(t \to \infty) = S(0)$.

Ejercicio 5: La función *error*, $\mathrm{erf}(x)$, se define según:

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp\left(-t^2\right)\, dt$$

a) Mostrar que: $\mathrm{erf}(0) = 0$, $\mathrm{erf}(\infty) = 1$ y $\mathrm{erf}(-x) = -\mathrm{erf}(x)$.

b) Escribir $\Phi(x)$, la distribución de probabilidad acumulada de la variable normal estándar, en función de $\mathrm{erf}(x)$, para todo valor de x.

c) Desarrollar una rutina en computadora para evaluar $\Phi(x)$ utilizando la rutina del "Numerical Recipes" diseñada para el cálculo de $\mathrm{erf}(x)$.

• Estrategia para Opciones "Call" Americanas

La condición obvia para realizar una opción "call", en un dado instante t, es $S(t) > K$. De esta forma, el tenedor de la opción compra la acción por el precio K establecido en la opción y acto seguido la vende por su precio de mercado $S(t)$, realizando de esta manera una ganancia igual $S(t) - K$. Ahora bien, no es obvio responder en que instante de tiempo conviene realizar la opción (en el caso de una opción americana) para obtener la máxima ganancia. Una estrategia que se utiliza para estimar el momento más apropiado para realizar la opción, es explorar la posibilidad de arbitraje a partir de la fórmula de Black-Scholes. Esta política de compra puede resumirse de la siguiente manera:

La opción "call" se ejerce faltando m días para que expire su tiempo de ejercicio si se cumple que:

i) $P_m > K$,

ii) $(P_m - K)\ e^{j\,r} > C_j$, para cada $j = 1, \ldots, m$;

donde P_m es el precio de mercado de la acción faltando m días por transcurrir para que expire la opción ($P_m = S(T - m)$), j es el número de días contados desde el momento en que se ejerce la opción. La condición **(ii)** explora si el valor de la ganancia realizada: $P_m - K$ (cuando esta ocurre según la condición **(i)**), actualizada a la tasa de interés (continua) r del mercado, resulta mayor que el costo de la opción en cada uno de los días subsiguientes hasta que expira la opción. Si para algún j no se cumple la condición **(ii)** no conviene realizar la opción, porque el costo de esta el día j resultará mayor que el valor actualizado de la ganancia obtenida al realizarla. Claramente, según esta estrategia si al cabo de los m días *no* se realiza la opción la ganancia obtenida es nula.

Ejercicio 6: Suponiendo que se tiene una opción "call" americana que expira dentro de 20 días (es decir que aún restan por transcurrir 20 días de posibles transacciones) y siendo $K = S_0 = 100$, estimar mediante simulación el valor esperado y la desviación estándar de la ganancia obtenida si se realiza la opción según la estrategia anteriormente detallada. Comparar los valores del promedio y desviación estándar obtenidos para la ganancia, con los que resultan de operar bajo las mismas circunstancias según la estrategia: Esperar hasta el último día para realizar la opción, y realizarla si $S(T) = P_0 > K$.

Observaciones:

- El costo C_j de la opción requerido en la condición **(ii)** debe evaluarse acorde a la fórmula de Black-Scholes según:

$$C_j = P_m \; \Phi(\omega(j)) - K \, e^{-r\,j} \; \Phi\left(\omega(j) - \sigma\sqrt{j}\right) \; .$$

- Los precios de la acción asociada se inicializan según: $P_{m=20} = S_0$, y se generan de acuerdo a un movimiento browniano geométrico según: $P_{m-1} = P_m \, e^N$, donde N es una variable aleatoria normal de parámetros (μ, σ^2).

Efectuar las estimaciones solicitadas mediante 10000 simulaciones y teniendo en cuenta las siguientes "condiciones de mercado":

a) $\mu = 0.06$, $\sigma = 0.3$, $r = 0.15$,

b) $\mu = -0.06$, $\sigma = 0.3$, $r = 0.03$,

c) $\mu = -0.09$, $\sigma = 0.3$, $r = 0.01$,

d) $\mu = -0.10$, $\sigma = 0.3$, $r = 0.01$.