Modelos y Simulación – Licenciatura en Computación

Guía N°1: Introducción

Problema 1: Los siguientes datos corresponden a los tiempos de llegada y de servicio que se invierten en cada uno de los primeros 13 clientes que llegan a un sistema con un *único* servidor:

Tiempo de llegada:	12	31	63	95	99	154	198	221	304	346	411	455	537
Tiempo de servicio:	40	32	55	48	18	50	47	18	28	54	40	72	12

El sistema funciona de manera tal que a llegar un cliente, pasa a servicio si el servidor está libre o bien se forma en la línea de espera. Cuando el servidor concluye el trabajo de un cliente, el siguiente de la línea, es decir quien ha esperado más tiempo, entra en servicio.

a) Determine los tiempos de salida y de espera de estos primeros 13 clientes.

b) Repita lo calculado en el item **a)** considerando que el sistema posee *dos* servidores que atienden clientes.

c) Repita lo calculado en el item **a)** considerando un único servidor pero bajo la condición, que cuando el servidor concluye un servicio, el siguiente cliente debe ser el que haya esperado menos tiempo.

Problema 2: Considere un sistema con un único servidor en el que los clientes son atendidos por orden de llegada.. Sean A_n, S_n y D_n, respectivamente, la hora de llegada, el tiempo de servicio y la hora de salida del cliente n.

a) Asumiendo $D_0 = 0$, mostrar que para $n > 0$

$$D_n = S_n + \max(A_n, D_{n-1})$$

b) Determinar la fórmula de recurrencia para un sistema con dos servidores.

c) Generalizar la fórmula de recurrencia para un sistema con k servidores.

d) Implementar un programa en computadora que calcule las horas de salida y tiempos de espera en función de las horas de llegada y los tiempos de servicio de los clientes. Verificar lo calculado en los items **a)** y **b)** del problema anterior.

Problema 3: La variable aleatoria X toma valores en el conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$ con la siguiente probabilidad:

$$P_i = P(X = i) = c\,i \quad \text{para } i = 1, 2, 3, 4$$

a) Determinar el valor de c.

b) Calcular $P(2 \leq X \leq 3)$.

c) Calcular $E[X]$.

Problema 4: Mostrar que $\mathrm{Var}[a\,X + b] = a^2\,\mathrm{Var}[X]$.

Problema 5: Suponga que los motores de aviación, independientemente de sus características y potencia, tienen una probabilidad p de funcionar sin fallas durante el tiempo que insume un vuelo transatlántico. Suponga además que un avión necesita al menos la mitad de sus motores funcionando sin fallas para poder volar. Sea n el número de motores de un avión.

a) Si $n = 2$, calcule la probabilidad P_2 que un avión complete el vuelo.

b) Si $n = 4$, calcule la probabilidad P_4 que un avión complete el vuelo.

c) Grafique P_2 y $(P_4 - P_2)$ como funciones de p.

d) Determine para que valores de p un avión bimotor tiene más probabilidad de completar el vuelo transatlántico que un avión cuatrimotor; es decir, para que valores de p resulta $P_2 > P_4$?

Problema 6: Calcular la relación de recurrencia $P_{n+1} = f(P_n)$ para la distribución de probabilidad de Poisson. Discutir su uso para un cálculo numérico eficiente de la distribución de Poisson.

Problema 7: Sean X e Y variables aleatorias independientes con distribución de Poisson con parámetros λ_1 y λ_2 respectivamente. Demostrar que la variable $Z = X + Y$ es de Poisson con parámetro $\lambda_1 + \lambda_2$.

Problema 8: Sean X e Y variables aleatorias *independientes* distribuídas *exponencialmente*

$$f_X(x) = \lambda \exp(-\lambda x)\ , \quad (x > 0) \qquad\qquad f_Y(y) = \mu \exp(-\mu y)\ , \quad (y > 0).$$

a) Calcular $f(x|y)$.

b) Calcular $P(X < y)$, donde y es un valor dado.

c) Calcular $P(X < Y) \equiv E[P(X < y)] = ?$

Problema 9: Sean X e Y variables aleatorias independientes e idénticamente distribuídas de forma exponencial. Calcular la densidad de probabilidad condicional de X dado que $X + Y = t$.

Problema 10: Una máquina embotelladora de soda inyecta en promedio una cantidad μ (en moles) de gas carbónico en cada botella. La cantidad de gas inyectado tiene una distribución normal con una desviación estándar igual a $0,01$ mol. Calcule el valor de μ para que solamente en el 1% de las botellas resulte con una cantidad de gas que supere 1 mol.