La simulación de Buffon

Pedro A. Pury*
Probabilidad y Estadística – Licenciatura en Computación –
Facultad de Matemática, Astronomía y Física
Universidad Nacional de Córdoba
(October 2000)

Se presenta el problema del cálculo del número π mediante la simulación de un experimento aleatorio, según la propuesta de Buffon en el siglo XVIII.

I. INTRODUCCIÓN

Un matemático del siglo dieciocho llamado Buffon, sugirió la siguiente técnica para calcular el valor de π: Tomar una gran hoja de papel, la cual se encuentra rayada con finas líneas paralelas separadas entre sí por dos centímetros. Arrojar al azar sobre el papel, un gran número de veces, una fina aguja de un centímetro de largo, de forma que caiga acostada. Se calcula la proporción de veces que la aguja interseca alguna línea del papel y el valor de π se estima como la inversa de dicha proporción.

II. SIMULACIÓN EN COMPUTADORA

Tarea: Escribir un programa que simule en la computadora la técnica mencionada de arrojar la aguja. Esto resulta mucho más cómodo que efectivamente dejar caer una aguja sobre una hoja rayada. Notar que el problema es equivalente a sortear uniformente la posición del centro de la aguja en un intervalo de ancho 2, y sortear el ángulo que forma la aguja de largo 1 con la dirección de la recta que contiene al intervalo de interés, uniformemente entre 0 y π. Para cada prueba verificar a continuación si la proyección de la aguja sobre la recta mencionada, interseca algún extremo del intervalo.

Las variables que se sortean uniformemente son: $r \in [0, 2]$ y $\theta \in [0, \pi]$ [1]. En consecuencia las ordenadas de los extremos de la aguja resultan:

$$y_a = r + \frac{1}{2}\cos\theta \qquad y_b = r - \frac{1}{2}\cos\theta$$

Se considera que se produce intersección si $y_{a,b} \leq 0$ ó $y_{a,b} \geq 2$. Claramente, no existirá intersección si $r \in (1/2, 3/2)$. En la siguiente tabla se registra los resultados de una simulación realizada en FORTRAN. En la primer columna registra el número de veces que se sorteó la posición de la aguja y la segunda columna registra la inversa de la frecuencia con la que los extremos de aguja salen del intervado de ancho 2.

n	π	σ_P
1.000	3.0120482	0.15
10.000	3.1113877	0.046
100.000	3.1401118	0.015
1.000.000	3.1462569	0.0046
10.000.000	3.1408347	0.0015
100.000.000	3.1425390	0.00046
1.000.000.000	3.1418059	0.00015
	3.1413830	
	3.1417812	

Nota: Para realizar la simulación el programa utiliza el valor de π que quiere estimarse. Esto sin embargo, no constituye un fraude dado que sólo se lo utiliza para simular el proceso de arrojar la aguja, no en el cálculo del número en sí.

III. ESTIMACIÓN DEL ERROR DE LA SIMULACIÓN

Tarea: Estimar el valor de n (número de pruebas) necesario para asegurar el valor de π con cinco cifras significativas (es decir que el error afecte recién al sexto decimal).

El estimador insesgado de la frecuencia con la cual la aguja corta los renglones es $F = Y/n$, donde Y es el número de veces que se produce intersección al realizar n pruebas al azar. Resulta:

$$E(F) = p = \frac{1}{\pi} \qquad V(F) = \frac{p(1-p)}{n}$$

De esta forma el estimador de π es la variable aleatoria $P = 1/F$. En general para una variable $P = H(F)$, conociendo $E(F) = \mu$ y $V(F) = \sigma^2$, se pueden utilizar las fórmulas aproximadas

$$E(P) \approx H(\mu) \qquad V(P) \approx (H'(\mu))^2\, \sigma^2$$

Resulta entonces $V(P) \approx V(F)/p^4$ y en consecuencia

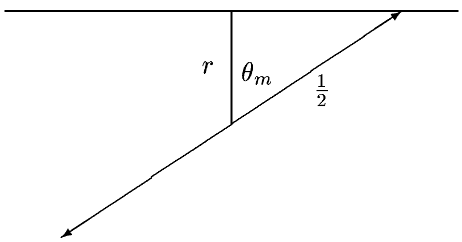
$$\sigma_P \approx \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}\frac{1}{p^2}} = \sqrt{\frac{\pi^2(\pi-1)}{n}} \approx \frac{4.6}{\sqrt{n}}$$

En la última columna de la tabla anterior se consignan los valores de σ_P correspondientes a cada valor de n. En particular si se desea $\sigma_P = 10^{-6}$ resulta $n \approx 2,116 \times 10^{13}$.

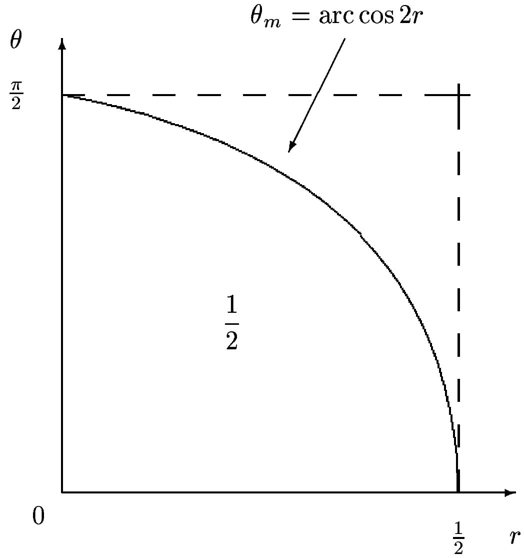
IV. JUSTIFICACIÓN TEÓRICA DE LA SIMULACIÓN

Tarea: En base a la Teoría de la Probabilidad elaborar un argumento que explique porqué el método de arrojar la aguja funciona para estimar el valor de π.

En la siguiente figura se representa la situación en la cual la aguja presenta el máximo ángulo (θ_m) posible para que exista intersección, dada una distancia r desde el centro de la aguja al renglón.



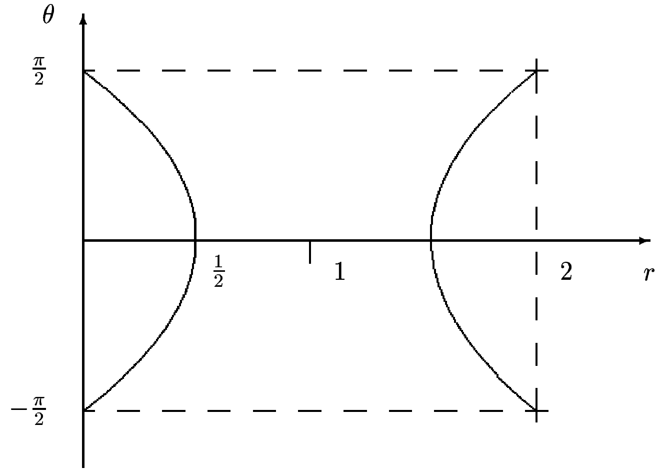
Tenemos entonces la relación $\cos\theta_m = 2r$ $(0 < r < 1/2)$. El area encerrada bajo la curva definida por la función $\theta_m(r)$ resulta entonces:



$$\int_0^{1/2} dr \int_0^{\theta_m} d\theta = \int_0^{1/2} \theta_m(r)\, dr = \frac{1}{2}\int_0^1 \operatorname{arc\,cos} x\, dx =$$

$$\frac{1}{2}\left[x \operatorname{arc\,cos} x - \sqrt{1-x^2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

Tenemos entonces que en el plano (r, θ) se sortean uniformemente los puntos del rectángulo descripto en la siguiente figura cuya area es 2π. Por otro lado las areas encerradas por las curvas de ángulo máximo y las verticales en $r = 0$ y $r = 2$, y que corresponden a las situaciones de intersección, suman 2. Por lo tanto la probabilidad de intersección resulta $1/\pi$.



* Electronic mail: pury@famaf.unc.edu.ar

[1] Notar que tambien resulta equivalente sortear $\theta \in [0, 2\pi]$.