Probabilidad y Estadística – Licenciatura en Computación y Profesorados

Guía N°2: Introducción a la Probabilidad

Problema 1: Considere cuatro objetos: a, b, c, d. Suponga que el *orden* en el cual se anotan los cuatro objetos representa el resultado de un experimento. Sean A y B los eventos definidos como sigue: $A = \{a \text{ está en el primer lugar}\}$; $B = \{b \text{ está en el segundo lugar}\}$.

a) Describir por enumeración el espacio muestral de este experimento.

b) Describir por enumeración los eventos A y B.

c) Describir por enumeración los eventos $A \cap B$ y $A \cup B$.

Problema 2: Sean A, B y C tres eventos asociados con un dado experimento. Expresar las siguientes proposiciones coloquiales en notación de conjuntos:

a) Al menos uno de los eventos ocurre.

b) Exactamente uno de los eventos ocurre.

c) Exactamente dos de los eventos ocurren.

d) Ocurren más de dos eventos simultáneamente.

Problema 3:

a) Probar que si $A \subset B$ entonces $P(A) \leq P(B)$.

b) Si A, B y C son tres eventos, en un espacio de probabilidad, probar que:

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(C \cap B) + P(A \cap B \cap C)$.

c) Demostrar que para dos eventos cualesquiera, A_1 y A_2, se tiene que $P(A_1 \cup A_2) \leq P(A_1) + P(A_2)$.

d) Demostrar que para n eventos cualesquiera, $A_1, \ldots, A_n$, se tiene que $P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \leq P(A_1) + \ldots + P(A_n)$.

Sugerencia: Usar inducción matemática. Esta desigualdad se llama Desigualdad de Boole.

e) Demostrar que $P\left((A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)\right) = P(A) + P(B) - 2\,P(A \cap B)$. Esta probabilidad corresponde al evento en el cual exactamente uno de los eventos A o B ocurre.

Problema 4: Supóngase que A y B son eventos para los cuales $P(A) = x$, $P(B) = y$, $P(A \cap B) = z$. Expresar cada una de las probabilidades siguientes en términos de x, y y z.

a) $P(A^c \cup B^c)$ **b)** $P(A^c \cap B)$ **c)** $P(A^c \cup B)$ **d)** $P(A^c \cap B^c)$

Problema 5: Una instalación cuenta de dos calderas y un motor. Sea A el evento en el cual el motor está en buenas condiciones; mientras que los eventos B_k, $k = 1, 2$, son los eventos en los cuales la k-ésima caldera esté en buenas condiciones. El evento C corresponde a que la instalación pueda funcionar. Si la instalación funciona cada vez que el motor y al menos una caldera funciona, expresar C y C^c en términos de A y de los eventos B_i. Interpretar C^c.

Problema 6: Existen tres opciones preferidas para cierto tipo de automóvil nuevo: con transmisión automática (A), con dirección hidráulica (B) y con radio (C). Si el 70 % de los compradores eligen la opción (A), el 80 % eligen la opción (B), el 75 % eligen la opción (C), el 85 % solicitan A o B, el 90 % solicitan A o C, el 95 % eligen (B) o (C) y el 98 % eligen (A) o (B) o (C). Calcular las probabilidades de los siguientes eventos:

a) El siguiente comprador selecciona por lo menos una de las tres.

b) El siguiente comprador no seleccionará ninguna de las tres opciones.

c) El siguiente comprador seleccionará sólo uno con radio.

d) El siguiente comprador seleccionará exactamente una de las tres opciones.

Asumir que cada comprador elige a su criterio personal, independientemente de las opciones de los otros compradores.

Problema 7: En una habitación 10 personas tienen insignias numeradas del 1 al 10. Se eligen tres personas al azar y se les pide que dejen la habitación simultáneamente y se anotan el número de las insignias.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el menor número de las insignias sea 5?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el mayor número de las insignias sea 5?

Problema 8: Diez fichas numeradas de 1 al 10 se mezclan en una caja. Se sacan de la caja dos fichas una y otra sin sustitución (X,Y). ¿Cuál es la probabilidad que $X + Y = 10$?

Problema 9: Un inspector visita seis máquinas diferente durante el día. A fin de impedir que los operadores sepan cuando seran inspeccionados, se varía el orden de las visitas. ¿De cuántas maneras puede hacerlo?

Problema 10: Utilizando las letras a, b, c, d, e, y f, ¿cuántas palabras clave de cuatro letras se pueden formar, si

a) ninguna letra puede aparecer repetida en la palabra?

b) cualquier letra puede repetirse cualquier número de veces?

Problema 11:

a) Beethoven escribió 9 sinfonías y Mozart escribió 27 conciertos para piano. Si el musicalizador de una radiodifusora desea reproducir primero una sinfonía de Beethoven y luego un concierto de Mozart, ¿de cuántas maneras se puede hacer esto?

b) El gerente de la radiodifusora determina que en cada noche sucesiva (7 días por semana), se transmitirá una sinfonía de Beethoven, seguida de un concierto para piano de Mozart, y luego un cuarteto para cuerdas de Schubert (de los cuales hay 15). ¿Durante alrededor de cuántos años podría continuarse este sistema antes de que tenga que repetirse el mismo programa?

Problema 12: Una caja contiene esferas numeradas consecutivamente del 1 al n. Se escogen dos esferas al azar. Calcular la probabilidad de que los números sobre las esferas sean consecutivos, si

a) las esferas se eligen sin sustitución.

b) las esferas se eligen con sustitución.

Problema 13: Entre los números 1,2,...,50 se escoge uno al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que el número escogido sea divisible por 6 o por 8?

Problema 14: Un lote contiene n artículos y se sabe que r de estos artículos son defectuosos. Si se inspecciona al azar el lote completo y en forma sucesiva, cuál es la probabilidad de que el k-ésimo artículo $(k \geq r)$ sea el último defectuoso en el lote?