Facultad de Matemática, Astronomía y Física

Universidad Nacional de Córdoba

Probabilidad y Estadística – Licenciatura en Computación y Profesorados

Guía N°3: Probabilidad Condicional e Independencia

Problema 1: Suponga que se tienen 2 urnas, 1 y 2, cada una de ellas con dos cajones. La urna 1 contiene una moneda de oro en un cajón y una de plata en el otro, mientras que la urna 2 tiene una moneda de oro en cada uno de los cajones. Se escoge una urna al azar, y de esta se escoge un cajón al azar. La moneda que se encontró en este cajón es de oro. ¿Cuál es la probabilidad que la moneda elegida provenga de la urna 2?

Problema 2: Un número binario está compuesto sólo de los dígitos 0 y 1. Suponga que un número binario está formado por n dígitos. Suponga además, que la probabilidad de que contenga un dígito incorrecto es p y que los errores en dígitos diferentes son independientes uno de otro. ¿Cuál es la probabilidad de formar un *número* incorrecto?

Problema 3: Sean A y B dos eventos asociados con un experimento. Supóngase que $P(A) = 0{,}4$, mientras que $P(A \cup B) = 0{,}7$. Sea $P(B) = p$.
a) ¿Para qué elección de p son A y B mutuamente excluyentes?
b) ¿Para qué elección de p son A y B independientes?

Problema 4: Sean A y B dos eventos independientes. Probar que: A y B^c, A^c y B, y A^c y B^c son independientes.

Problema 5: En la fabricación de cierto artículo se presenta un cierto tipo de defecto con una probabilidad igual a 0,1 y se presentan defectos de un segundo tipo con una probabilidad igual a 0,05. (Se supone que la ocurrencia de los distintos tipos de defectos son eventos independientes). ¿Cuál es la probabilidad de que
a) un artículo no tenga ambas clases de defectos?
b) un artículo sea defectuoso?
c) suponiendo que un artículo sea defectuoso, tenga un sólo tipo de defecto?

Problema 6: Verificar que el teorema de la multiplicación $P(A \cap B) = P(A \mid B)\, P(B)$, establecido para dos eventos, se puede generalizar para tres eventos según:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A \mid B \cap C)\, P(B \mid C)\, P(C)\ .$$

Problema 7: Dos tubos defectuosos se confunden con dos buenos. Los tubos se prueban, uno por uno, hasta encontrar los defectuosos.

a) ¿Cuál es la probabilidad de encontrar el último tubo defectuoso en la segunda prueba?

b) ¿Cuál es la probabilidad de encontrar el último tubo defectuoso en la tercera prueba?

c) ¿Cuál es la probabilidad de encontrar el último tubo defectuoso en la cuarta prueba?

d) Sumar los resultados obtenidos en (a), (b) y (c), ¿le sorprende el resultado obtenido?

Problema 8: Un aficionado usa el siguiente sistema, bastante simple, para pronosticar el tiempo atmosférico. Clasifica cada día como "seco" o "mojado" y supone que la probabilidad de que un día cualquiera dado sea igual al anterior está dada por una constante p $(0 < p < 1)$. En base a anotaciones anteriores, se asume que el 1 de enero tiene una probabilidad β de ser "seco". Suponiendo que β_n es la probabilidad el n-ésimo día del año sea "seco", obtener una expresión para β_n en función de β y p.

Ayuda: Observar que $\beta_n = (1-p) + (2p-1)\,\beta_{n-1}$, con $\beta_1 = \beta$ y recordar que $1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^m = (1 - \alpha^{m+1})/(1-\alpha)$.

Evaluar también el límite de β_n para $n \to \infty$ e interpretar el resultado.

Problema 9: En un test de múltiples opciones, la probabilidad que un alumno sepa la respuesta es p. Teniendo m opciones, el estudiante que sabe la respuesta, responde correctamente con probabilidad 1; mientras que si no la sabe responde correctamente con probabilidad $1/m$. ¿Cuál es la probabilidad de que el alumno conozca la respuesta si respondió la pregunta correctamente?

Problema 10: Durante el mes de noviembre la probabilidad de lluvia es $0,3$. Cierto equipo de fútbol gana un partido en los días de lluvia con probabilidad $0,4$ y en un día sin lluvia con probabilidad $0,6$. Si dicho equipo ganó un partido en noviembre, ¿cuál es la probabilidad que haya llovido ese día?

Problema 11: Suponga que una determinada característica oftálmica está asociada con el color de ojos. Se estudiaron 300 personas, seleccionadas al azar, y se obtuvieron los siguientes resultados:

	Color de ojos			
Característica	Azul	Café	Otro	*Totales*
Si	70	30	20	120
No	20	110	50	180
Totales	90	140	70	300

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona seleccionada al azar tenga los ojos azules?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona seleccionada al azar posea la característica oftálmica?

c) ¿Son independientes los eventos A (tener ojos azules) y B (poseer la característica)? Justificar la respuesta.

d) ¿Qué relación se establece entre los eventos A (tener ojos azules) y C (tener ojos café)? ¿Son independientes, mutuamente excluyentes, complementarios? Explicar si se aplica o no cada una de estas categorías.

Problema 12: Un test de sangre es efectivo para detectar el SIDA, cuando la enfermedad está presente en los pacientes analizados, el 95 % de las veces. Sin embargo el test produce un resultado falso positivo el 1 % de las veces. Suponga que el 0,5 % de una población padece la enfermedad. ¿Cuál es la probabilidad que una persona se encuentre enferma de SIDA si el test arrojó un resultado positivo?

Problema 13: Supongase que una moneda honesta es arrojada tres veces registrándose el resultado obtenido después de cada una de ellas. Sea A_i el evento "i-ésima tirada resultó cara", con $i = 1, 2, 3$. ¿Los eventos A_1, A_2 y A_3 son mutuamente independientes?

Problema 14: Un conjunto electrónico consta de dos subsistemas, digamos A y B. A partir de una serie de pruebas previas, se presuponen las siguientes probabilidades:

$$\begin{aligned} \text{P(A falle)} &= 0.20 \\ \text{P(sólo falle B)} &= 0.15 \\ \text{P(A y B fallen)} &= 0.15 \end{aligned}$$

a) Calcular las siguientes probabilidades:

i) P(sólo falle A)

ii) que al menos un subsistema falle.

iii) P(A falle | B falló)

b) ¿Son A y B eventos independientes?