Probabilidad y Estadística – Licenciatura en Computación y Profesorados

Guía N°4: Variables Aleatorias Unidimensionales

Problema 1: Sea X una variable aleatoria con distribución de probabilidad dada por $P(X = j) = 2^{-j}$ $\forall\, j = 1, 2, \ldots$. Calcular:

a) $P(X$ es par$)$

b) $P(X \geq 5)$

c) $P(X$ es divisible por 3$)$

Problema 2: De un lote que contiene 25 artículos, 5 de los cuales son defectuosos, se eligen 4 al azar. Sea X el número de artículos defectuosos encontrados. Obtener la distribución de la variable aleatoria X si:

a) los artículos se escogen con sustitución,

b) los artículos se escogen sin sustitución.

Problema 3: Se sabe que al lanzar una moneda, la cara sale tres veces más que el sello. Esta moneda se lanza tres veces. Sea X el número de caras que aparecen. Establecer la distribución de probabilidad y la función de distribución acumulativa de X. Graficarlas.

Problema 4: De los donantes voluntarios de sangre de un hospital, el 80 % tiene el factor Rh (Rhesus) en su sangre.

a) Si se eligen cinco donantes al azar, ¿Cuál es la probabilidad de que al menos uno no posea el factor Rh?

b) Si se seleccionan cinco voluntarios al azar, ¿Cuál es la probabilidad de que a lo más cuatro tengan el factor Rh?

c) ¿Cuál será el mínimo número de donantes que se tienen que convocar, si se desea tener una seguridad no menor que el 90 % de obtener por lo menos cinco donantes con el factor Rh?

Problema 5: Se lanzan una serie de cohetes hasta que ocurre el primer lanzamiento exitoso. Si esto no sucede en cinco ensayos, el experimento se detiene y se inspecciona el equipo. Suponer que hay una probabilidad constante igual a 0,8 de tener un lanzamiento exitoso y que los ensayos sucesivos son independientes. Además el costo del primer lanzamiento es de K dólares, mientras que los siguientes cuestan $K/3$ dólares. Cada vez que hay un lanzamiento exitoso, se obtiene cierta cantidad de información que puede expresarse como una ganancia financiera igual a C dólares. Si T es el costo neto del experimento, encontrar la distribución de probabilidad de T.

Problema 6: Sea X una variable aleatoria continua cuya función densidad de probabilidades f está dada por:

$$f(x) = \begin{cases} ax, & 0 \leq x \leq 1 \\ a, & 1 \leq x \leq 2 \\ -ax + 3a, & 2 \leq x \leq 3 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

a) Determinar la constante a.

b) Determinar la función distribución acumulada F y representarla gráficamente.

c) Si X_1, X_2, X_3 son tres observaciones independientes de X. ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente uno de esos tres números sea mayor que 1,5?

Problema 7: La función F representa la función distribución acumulada de una variable aleatoria continua. Sabiendo que:

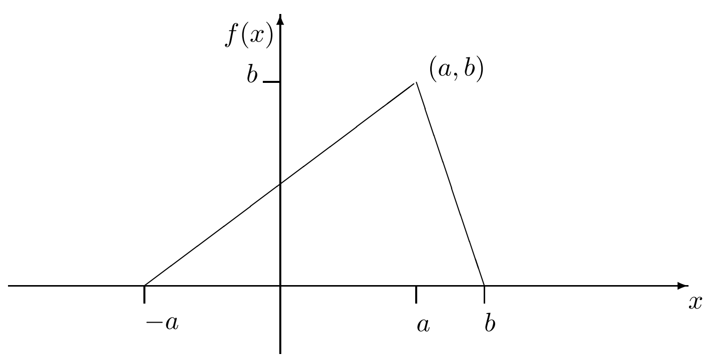
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ \frac{1}{2}(x^3 + 1), & -1 \leq x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

determinar la función densidad de probabilidad $f(x)$ y graficarla. Verificar que $f(x)$ es una función densidad de probabilidad.

Problema 8: Suponer que la gráfica de la figura representa la función densidad de la variable aleatoria X.

a) ¿Cuál es la relación entre a y b?

b) Si a y b son positivos, qué puede decirse sobre el máximo valor que puede tomar b?



Problema 9: Suponga que la variable aleatoria X está distribuída uniformemente en el intervalo $[-\alpha, +\alpha]$, donde $\alpha > 0$. Cada vez que sea posible, determinar α de modo que se satisfaga la siguiente condición:

a) $P(X > 1) = 1/3$,

b) $P(X > 1) = 1/2$,

c) $P(X < \frac{1}{2}) = 0{,}7$,

d) $P(|X| < 1) = P(|X| > 1)$.

Problema 10: El porcentaje de alcohol $(100\,X)$ en cierto compuesto se puede considerar como una variable, donde X tiene la siguiente función densidad: $f(x) = ax^3(1-x),\ 0 < x < 1$.

a) Determinar el valor de la constante a.

b) Obtener una expresión para la función de distribución acumulada, $F(x)$, y graficarla.

c) Calcular $P(X \leq 2/3)$.

d) Suponer que el precio de venta del compuesto anterior depende del contenido de alcohol. Específicamente, si $1/3 < X < 2/3$, el compuesto se vende en C_1 dólares por galón; de otro modo se vende en C_2 dólares por galón. Si el costo es de C_3 dólares por galón, encontrar la distribución de probabilidad de la utilidad neta por galón.

Problema 11: Si la variable aleatoria K está distribuída uniformemente en el intervalo $[0,5]$. ¿Cuál es la probabilidad de que las raíces de la ecuación $4\,x^2 + 4\,x\,K + K + 2 = 0$ sean reales?

Problema 12: Suponer que la duración (en horas) de un cierto tubo de radio es una variable aleatoria continua X, cuya función densidad es $f(x) = 100/x^2$ si $x > 100$ y 0 para cualquier otro valor.

a) ¿Cuál es al probabilidad de que el tubo dure menos de 200 hs, si se sabe que el tubo todavía funciona después de 150 hs de servicio?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que si se instalan tres de estos tubos en un conjunto, exactamente uno tenga que ser sustituído después de 150 hs de servicio?

c) ¿Cuál es el número máximo de tubos que se pueden poner en un conjunto de modo tal que haya una probabilidad de 0.5 de que después de 150 hs de servicio funcionen todavía?

Problema 13: Suponga que la vida útil de un cierto tipo de lámparas tiene una *distribución exponencial* de parámetro λ, es decir, su función densidad de probabilidad está dada por $f(x) = \lambda\, e^{-\lambda x}$, para $x \geq 0$.

a) Sea T la vida de una lámpara de este tipo. Mostrar que: $P(T > t + s \,|\, T > t) = P(T > s)\ \forall\, s, t > 0$.

b) Demuestre que $P(j \leq T \leq j+1)$ es de la forma $(1-a)\,a^j$ y determine a.

c) Suponga que $\lambda = 3$ cuando se expresa la vida útil en días. Una lámpara se enciende en una habitación en un instante $t = 0$. Un día después usted entra a la habitación y se queda allí durante 8 horas, saliendo al final de ese período.

i) ¿Cuál es la probabilidad de que usted entre a la habitación cuando esta ya está oscura?

ii) ¿Cuál es la probabilidad de que cuando usted entre a la habitación la lámpara esté encendida y que se apague mientras usted permace allí?