Probabilidad y Estadística – Licenciatura en Computación y Profesorados

Guía N° 5: Funciones de Variables Aleatorias y Variables Bidimensionales

Problema 1: Suponga que la variable aleatoria discreta X toma los valores 1, 2 y 3 con igual probabilidad. Calcular la distribución de probabilidad de la variable aleatoria $Y = 2X + 3$.

Problema 2: Una variable aleatoria Z tiene *distribución normal estándar* (que denotaremos por $\mathcal{N}(0,1)$). La función densidad de probabilidad esta dada por:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right), \qquad \forall z \in R.$$

a) Obtener la función densidad de $Y = aZ + b$, donde a y b son números reales ($a \neq 0$).

b) Obtener la función densidad de $X = Z^2$.

c) Obtener la función densidad de $W = |Z|$.

Problema 3: Sea U una variable aleatoria con distribución uniforme en el intervalo $(0,1)$ ($\mathcal{U}(0,1)$) y sea $X = -\ln(1-U)/\lambda$, con $\lambda > 0$ fijo.

a) Obtener la función densidad de X.

b) Suponiendo que $\lambda = 1$, calcular la función densidad de probabilidad de las siguientes variables aleatorias:

i) $Y = X^3$, **ii)** $Z = \dfrac{3}{(X+1)^2}$.

Problema 4: Suponga que la variable aleatoria X está distribuída uniformemente en el intervalo $(0,1)$. Calcular la función densidad de probabilidad de las siguientes variables aleatorias:

a) $Y = X^2 + 1$, **b)** $Z = \dfrac{1}{(X+1)}$, **c)** $W = e^X$.

Problema 5: En la siguiente tabla se representa la distribución de probabilidad conjunta correspondiente a las variables aleatorias X e Y. Calcular las probabilidades marginales $P_X(x)$ y $P_Y(y)$ y las probabilidades condicionales $P(X = x \,|\, Y = y)$ y $P(Y = y \,|\, X = x)$.

$\frac{X}{Y}$	1	2	3
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	0
2	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{5}$
3	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{15}$

Problema 6: Cierto supermercado tiene una caja rápida y una común. Sea X_1 el número de clientes que están en espera en la caja común en un momento particular del día, y X_2 el número de clientes que están en espera en la caja rápida al mismo tiempo. Si la densidad conjunta de X_1 y X_2 está dada por:

$X_2 \backslash X_1$	0	1	2	3
0	0.08	0.07	0.04	0.00
1	0.06	0.15	0.05	0.04
2	0.05	0.04	0.10	0.06
3	0.00	0.03	0.04	0.07
4	0.00	0.01	0.05	0.06

a) ¿Cuál es la probabilidad de que haya exactamente un cliente en cada caja?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que haya exactamente el mismo número de clientes en las dos líneas de espera?

c) Sea A el evento de que haya por lo menos dos clientes más en una línea de espera que en la otra. ¿Cuál es la probabilidad del evento A?

d) ¿Cuál es la probabilidad de que el número total de clientes de las dos líneas de espera sea exactamente cuatro? ¿Y por lo menos cuatro?

e) Hallar las marginales de X_1 y X_2. ¿Son estas variables independientes?

Problema 7: Se asignan aleatoriamente los contratos para dos construcciones, los cuales pueden ser adjudicados a las empresas A, B o C. De esta forma cada empresa puede recibir 0, 1 o 2 contratos. Sea Y_1 el número de contratos asignados a la empresa A, e Y_2 el número de contratos asignados a la empresa B.

a) Determinar la función distribución de probabilidad conjunta para las variables aleatorias Y_1 e Y_2.

b) Determinar las probabilidades marginales de las variables Y_1 e Y_2.

c) ¿Son independientes Y_1 e Y_2? Justificar.

Problema 8: Suponga que se sacan dos cartas al azar de una baraja. Sea X el número de ases obtenidos e Y el número de reinas obtenido. Teniendo en cuenta que la baraja posee 52 cartas, siendo cuatro los ases y cuatro las reinas,

a) Obtener la distribución de probabilidad conjunta de (X, Y).

b) Obtener la distribución marginal de X y de Y.

c) Obtener la distribución condicional de X dado Y y de Y dado X.

Problema 9: Sea f la función densidad del vector aleatorio (X, Y) dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} kx(x-y) & ,\text{si } 0 < x < 2 \text{ y } -x < y < x \\ 0 & ,\text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

a) Determine el valor de la constante k.

b) Hallar las marginales de X e Y.

Problema 10: Suponga que la función densidad de probabilidad conjunta de la variable aleatoria bidimensional (X, Y) está dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + \dfrac{xy}{3}, & 0 < x < 1, \;\; 0 < y < 2, \\ 0, & \text{en otra parte.} \end{cases}$$

a) Encontrar las densidades de probabilidad marginales de X e Y

b) Calcular: i) $P(X > 1/2)$, ii) $P(Y < X)$, iii) $P(Y < \frac{1}{2} \,|\, X < \frac{1}{2})$.

Problema 11: Se selecciona al azar un punto en el cuadrado unitario $\{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$. Sean X e Y las coordenadas del punto seleccionado.

a) ¿Cuál es la densidad conjunta de X e Y?

b) Calcular las densidades marginales de X e Y.

c) Calcular $P(Y \geq X \,|\, Y \geq 1/2)$.

Problema 12: Sean X e Y variables aleatorias independientes idénticamente distribuídas con una distribución uniforme en el intervalo $(0, 1)$. Encontrar la densidad conjunta de W y Z, donde $W = X + Y$ y $Z = X - Y$. ¿Son W y Z independientes?