Facultad de Matemática, Astronomía y Física

Universidad Nacional de Córdoba

Probabilidad y Estadística – Licenciatura en Computación y Profesorados

Guía N°7: Distribuciones Muestrales

Problema 1: La variable aleatoria X que toma valores en los enteros no negativos tiene una distribución de Poisson con parámetro $\lambda > 0$ si:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}\, e^{-\lambda} \;, \quad k = 0, 1, \ldots$$

a) Calcular la media y la varianza de X.

Sean X_1 y X_2 dos variables aleatorias independientes con distribuciones de Poisson de parámetros λ_1 y λ_2, respectivamente.

b) Calcular la distribución de probabilidad de la variable $Z = X_1 + X_2$.

Problema 2: Sean X e Y variables aleatorias independientes, distribuídas con densidad de probabilidad exponencial de parámetros α y λ, respectivamente. Calcular la densidad de la variable $Z = X + Y$.

Problema 3: Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria con distribución de probabilidad acumulada $G(p)$. Sean $M = \text{máx}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ y $K = \text{mín}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Calcular las ditribuciones de M y K.

Problema 4: Considerar que X_i, $i = 1, 2, \ldots, 50$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuídas con una distribución de Poisson con parámetro $\lambda = 0{,}03$. Sea $S = X_1 + \ldots + X_{50}$.

Calcular $P(S \geq 3)$:

a) exactamente, usando la distribución de probabilidad de S.

b) de forma aproximada usando el teorema central del límite.

Problema 5: Sean $X_1, ..., X_n$ variables aleatorias independientes, cada una de las cuales con distribución exponencial con parámetro α_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ y sea $K = \text{mín}(X_1, \ldots, X_n)$.

a) Probar que K tiene una distribución exponencial con parámetro $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n$.

b) Si $\alpha_i = \alpha$, $i = 1, 2, \ldots, n$; calcular $E(K)$.

Problema 6: Sean $X_1, ..., X_n$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuídas de forma uniforme: $\mathcal{U}(0, \theta)$ y sea $M = \text{máx}(X_1, \ldots, X_n)$. Calcular la distribución de probabilidad de M y $E(M)$.

Problema 7: Se obtiene una muestra de tamaño 5 de una variable aleatoria con distribución $N(12, 4)$:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el promedio muestral exceda 13?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el mínimo de la muestra sea menor que 10?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que el máximo de la muestra exceda 15?

Problema 8: La duración de un artículo (expresada en horas) está distribuída exponencialmente con parámetro $\beta = 0{,}001$. Se prueban seis artículos y se anotan los tiempos en que ocurren las fallas.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que ningún artículo falle antes de que hayan transcurrido 800 horas?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que ningún artículo dure más de 3000 horas?

Problema 9: La variable aleatoria continua X está distríbuida uniformemente en el intervalo $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Se obtiene una muestra de tamaño n de X y se calcula el promedio muestral $\overline{X}$. ¿Cuál es la desviación estándar de $\overline{X}$?

Problema 10: Se toman dos muestras de tamaño 10 y 15 de una variable aleatoria normal con media 20 y varianza 3. ¿Cuál es la probabilidad de que el promedio de las dos muestras se diferencie (en valor absoluto) en más de 0,3?

Problema 11: La variable aleatoria X tiene distribución $N(2,9)$. Sean $X_1, \ldots, X_{20}$ una muestra aleatoria de X obtenida con la ayuda de la Tabla 7 del Apéndice del libro *Probabilidad y Aplicaciones Estadísticas* de Paul Meyer. Calcular la varianza muestral:

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}\right)^2$$

donde $n = 20$ y comparar el resultado numérico obtenido con el valor teórico $E(S^2) = 9$.