Facultad de Matemática, Astronomía y Física

Universidad Nacional de Córdoba

Probabilidad y Estadística – Licenciatura en Computación y Profesorados

Guía N°8: Estimación de los Parámetros

Problema 1: Una variable aleatoria X tiene fdp $f(x) = (\beta+1)\,x^{\beta}$, $0 < x < 1$, y $f(x) = 0$ en caso contrario, siendo $\beta > 0$ un parámetro desconocido.

a) Obtener el estimador de MV (máxima verosimilitud) de β, en base a una muestra $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

b) Evaluar el estimador si los valores muestrales son 0,3, 0,8, 0,27, 0,35, 0,62 y 0,55.

Problema 2: Suponer que T, el tiempo estimado (expresado en horas) para que ocurra la falla de un instrumento electrónico, tiene la siguiente fdp:

$$f(t) = \begin{cases} \beta \exp(-\beta\,(t - t_0))\,, & 0 < t_0 < t \\ 0\,, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

siendo $\beta > 0$ un parámetro desconocido. T resulta así con una distribución exponencial truncada a la izquierda de t_0. Suponer que se prueban n artículos y que se anotan los tiempos en los cuales estos fallan: $T_1, T_2, \ldots, T_n$.

a) Suponiendo que t_0 es conocido, obtener el estimador de MV de β.

b) Suponiendo que t_0 es desconocido, pero β conocida, obtener el estimador de MV de t_0.

c) Considerar ahora que se prueban N artículos durante T_0 horas ($T_0 > t_0$) y se anota el número k de artículos que fallan en tal período. Si t_0 es conocido, obtener el estimador de MV para β.

Problema 3: La variable aleatoria X tiene una distribución de Weibull, cuya densidad de probabilidad, definida para $x > 0$, está dada por:

$$f_X(x) = \lambda\,\alpha\,x^{\alpha-1}\,\exp(-\lambda x^{\alpha})\,.$$

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra de la variable aleatoria X. Calcular por el método de máxima verosimilitud un estimador para el parámetro λ ($\hat{\lambda}$). Asumir que el parámetro α es una constante conocida.

Problema 4: Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una variable con distribución $\mathcal{U}(0, \theta)$ ($\theta > 0$). Calcular el estimador de MV para θ. ¿Es un estimador insesgado?

Problema 5: La variable X, que mide la resistencia al corte de soldaduras eléctricas, tiene distribución normal con media μ y varianza σ^2. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra de la variable aleatoria X.

a) Calcular por el método de máxima verosimilitud los estimadores para μ y σ^2.

b) Estimar por máxima verosimilitud el percentil 95 % del valor de resistencia al corte; es decir, estimar x_0 tal que $P(X \leq x_0) = 0{,}95$.

Problema 6: Comparar el valor de $P(X \geq 1)$, donde X tiene una distribución $N(0,1)$, con $P(t \geq 1)$, donde t tiene una distribución t de Student con: **a)** 5 g.l., **b)** 15 g.l. y **c)** 25 g.l.

Problema 7: La variable aleatoria X tiene distribución $N(2,4)$. Sean $X_1, \ldots, X_{20}$ una muestra aleatoria de X, obtenida a partir de la Tabla 7 del Apéndice del libro de Paul Meyer.

a) Suponer que la muestra obtenida corresponde a una variable aleatoria con distribución $\mathcal{N}(\mu, 4)$. Usar los valores muestrales para dar un intervalo de confianza del 95 % para μ.

b) Suponer ahora que la muestra proviene de una distribución $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ con σ^2 desconocido. Usar nuevamente los valores muestrales para construir el intervalo de confianza del item anterior.

c) Comparar las longitudes de los intervalos de confianza obtenidos en **(a)** y **(b)**.

d) Suponger que la muestra obtenida corresponde a una variable aleatoria con distribución $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Usar los valores muestrales para dar un intervalo de confianza del 95 % para σ^2.

Problema 8: Suponer que la duración de un componente tiene una distribución normal, digamos $N(\mu, 9)$. Se prueban 20 componentes y se anotan los tiempos en los cuales ocurren sus respectivas fallas $X_1, \ldots, X_{20}$. Suponer que $\overline{X} = 100{,}9$ horas. La *confiabilidad* de un sistema denotada por $R(t)$, está definida según $R(t) = P(T > t)$, donde T es la variable correspondiente a la duración del componente hasta su falla.

a) Obtener un intervalo de confianza bilateral de 99 % para la confiabilidad $R(100)$.

b) Obtener un intervalo de confianza unilateral (inferior) de 99 % para la confiabilidad $R(100)$.

Problema 9: La siguiente muestra de tamaño 5, se obtuvo de la variable aleatoria bidimensional (X, Y). Usando estos valores, calcular el coeficiente de correlación muestral.

x	1	2	3	4	5
y	4	5	3	1	2

Problema 10: Sean $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ los estimadores de cuadrados mínimos correspondientes a la relación lineal: $E(Y) = \alpha X + \beta$.

a) Verificar que estos estimadores son insesgados, es decir: $E(\hat{\alpha}) = \alpha$ y $E(\hat{\beta}) = \beta$.

b) Calcular las varianzas $V(\hat{\alpha})$ y $V(\hat{\beta})$.

Problema 11: Suponer que $E(Y) = \alpha X + \beta$. Se dispone de una muestra de tamaño 50: (x_i, Y_i), $i = 1, \ldots, 50$; para la cual $\overline{x} = \overline{Y} = 0$, $\sum_{i=1}^{50} x_i^2 = 10$, $\sum_{i=1}^{50} Y_i^2 = 15$ y $\sum_{i=1}^{50} x_i Y_i = 8$.

a) Determinar los estimadores de mínimos cuadrados de los parámetros α y β, es decir $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$.

b) ¿Cuál es el valor de la suma mínima de cuadrados: $\sum_{i=1}^{50} [Y_i - (\hat{\alpha} x_i + \hat{\beta})]^2$?