Facultad de Matemática, Astronomía y Física, U.N.C.

Métodos Matemáticos de la Física I – 2015

Guía 2, Problema 13

a) Si la varilla que es perpendicular al plano lo atraviesa en el punto (x_o, y_o) entonces en el punto (x, y) de este plano el campo tiene intensidad proporcional a $1/\sqrt{(x-x_o)^2+(y-y_o)^2}$ y la dirección de $(x-x_o, y-y_o)$. Identificando un punto del plano (x, y) con el número complejo $z = x+iy$, el número complejo

$$E(z) := 1/(\overline{z}-\overline{z}_o) = \frac{z-z_o}{|z-z_o|^2}$$

corresponde al vector

$$\left(\frac{x-x_o}{(x-x_o)^2+(y-y_o)^2}, \frac{y-y_o}{(x-x_o)^2+(y-y_o)^2}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(x-x_o)^2+(y-y_o)^2}}\left(\frac{x-x_o}{\sqrt{(x-x_o)^2+(y-y_o)^2}}, \frac{y-y_o}{\sqrt{(x-x_o)^2+(y-y_o)^2}}\right) ,$$

que es lo que se quiere.

b) Si los puntos donde las varillas iguales y paralelas atraviesan el plano son z_1, z_2 y z_3 (distintos o no) entonces el campo total es

$$E(z) = \frac{1}{\overline{z}-\overline{z}_1} + \frac{1}{\overline{z}-\overline{z}_2} + \frac{1}{\overline{z}-\overline{z}_3}$$

siempre que z no coincida con alguno de los z_j en cuyo caso el campo es “infinito” (no está definido). Entonces

$$E(z) = \frac{(\overline{z}-\overline{z}_2)(\overline{z}-\overline{z}_3)+(\overline{z}-\overline{z}_1)(\overline{z}-\overline{z}_3)+(\overline{z}-\overline{z}_1)(\overline{z}-\overline{z}_2)}{(\overline{z}-\overline{z}_1)(\overline{z}-\overline{z}_2)(\overline{z}-\overline{z}_3)}$$

$$= \frac{\overline{\Phi(z)}}{(\overline{z}-\overline{z}_1)(\overline{z}-\overline{z}_2)(\overline{z}-\overline{z}_3)} ,$$

donde

$$\Phi(z) = (z-z_2)(z-z_3)+(z-z_1)(z-z_3)+(z-z_1)(z-z_2)$$
$$= 3z^2 - 2(z_1+z_2+z_3)z + z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3 .$$

Claramente, $E(z) = 0$ si sólo si $\Phi(z) = 0$. Con la fórmula[1] para las raices de un polinomio de grado 2 que el lector puede verificar inmediatamente, las raices de $\Phi(z) = 0$ son:

$$z_\pm = \frac{z_1+z_2+z_3 \pm \sqrt{z_1^2+z_2^2+z_3^2-z_1z_2-z_1z_3-z_2z_3}}{3}$$

$$= \frac{1}{3}\left(z_1+z_2+z_3 \pm \sqrt{\frac{(z_1-z_2)^2+(z_1-z_3)^2+(z_2-z_3)^2}{2}}\right) .$$

[1] $az^2+bz+c=0$ con $0 \neq a, b, c \in \mathbb{C}$ para $z \in \mathbb{C}$ implica que $z = z_\pm$ donde

$$z_\pm = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

donde $\sqrt{\ }$ denota la raíz cuadrada que más le guste (hay dos y una es el negativo de la otra).

Cuando los z_j son distintos entre si, son los vértices de un triángulo en el plano que puede degenerar a un segmento de recta. Si dos de los z_j coinciden, se tiene un segmento y si los tres z_j son iguales un sólo punto. En todo caso el “centro de masa” está en el punto $(z_1 + z_2 + z_3)/3$. Observese que si $z_1 = z_2 \neq z_3$, una de las raices será z_1 donde el campo es infinito, y la otra será $(z_1 + 2z_3)/3$ donde el campo efectivamente se anula. Si los tres puntos coinciden la raíz será z_1 donde el campo es infinito (en este caso el campo no se anula en ningún punto).

c) Cuando $z_1 = 0$, $z_2 = 1 + i$, y $z_3 = 1 - i$ tenemos un triángulo isóceles (pero no equilatero). Los puntos donde se anula el campo son: $(2/3) \pm i(\sqrt{2}/3)$.
Si $z_1 = 0$, $z_2 = 2$ y $z_3 = -2$ entonces los puntos donde se anula el campo son $\pm 2/\sqrt{3}$.

d) Volviendo a la fórmula general vemos que hay una sola raíz si y sólo si el radicando se anula:

$$(z_1 - z_2)^2 + (z_1 - z_3)^2 + (z_2 - z_3)^2 = 0 \; .$$

Esta expresión es invariante ante traslación del origen del sistema cartesiano que se usa para especificar las coordenadas en el plano. Por lo tanto podemos suponer que $z_3 = 0$. En tal caso debemos analizar cuando

$$0 = z_1^2 + z_2^2 + (z_1 - z_2)^2 = 2(z_1^2 + z_2^2 - z_1 z_2) \qquad (1)$$

con $z_1 \neq z_2$ y $z_1 \neq 0 \neq z_2$. Podemos leer esto como una ecuación (cuadrática) para z_2 y entonces

$$z_2 = \frac{z_1 \pm \sqrt{-3z_1^2}}{2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} \, z_1 \; .$$

O bien observar que con $\zeta := \exp(i\pi/3)$ se tiene

$$(z_2 - \zeta z_1)(z_2 - \overline{\zeta} z_1) = z_2^2 - 2Re(\zeta) z_1 z_2 + |\zeta|^2 z_1^2 = z_2^2 + z_1^2 - 2\cos(\pi/3) z_1 z_2 = z_1^2 + z_2^2 - z_1 z_2 \; ;$$

de modo que (1) se cumple si y sólo si $z_2 = \zeta z_1$ o $z_2 = \overline{\zeta} z_1$.
Pero

$$\cos(\pi/3) = 1/2 \; , \;\; \sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2 \; ,$$

de modo que

$$z_2 = \exp(\pm i\pi/3) \, z_1 \; ,$$

de donde se deduce que $|z_2| = |z_1|$ y que $\arg(z_2) = \arg(z_1) \pm \pi/3$. Por lo tanto el triángulo de vértices z_1, z_2 y $z_3 = 0$ es isóceles y el ángulo formado por los lados iguales asociados con z_1 y z_2 es de 60^o. Pero entonces el triángulo debe ser equilatero ya que el ángulo en la base es $(\pi - \pi/3)/2 = \pi/3$ (la suma de los tres ángulos es π y los dos ángulos de la base son iguales). Luego debemos tener $|z_1 - z_2| = |z_1|$ lo que se puede verificar directamente:

$$|z_2 - z_1|^2 = |\exp(\pm i\pi/3) z_1|^2 + |z_1|^2 - 2Re(\exp(\mp i\pi/3)\overline{z_1} z_1) = 2|z_1|^2 - 2|z_1|^2 \cos(\pi/3) = |z_1|^2 \; ;$$

proporcionando una demostración alternativa de que si hay una sola raíz el triángulo es equilatero.
Si el triángulo es equilatero, entonces $|z_1 - z_2| = |z_1 - z_3| = |z_2 - z_3|$ y haciendo una traslación del origen a z_3, $|z_1| = |z_2| = |z_1 - z_2|$ con lo cual

$$|z_1|^2 = |z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2Re(z_1 \overline{z_2})$$

$$= 2|z_1|^2 - 2|z_1|\,|z_2| \cos(\mathrm{Arg}(z_1 \overline{z_2}) = 2|z_1|^2(1 - \cos(\mathrm{Arg}(z_1 \overline{z_2})) \; ;$$

con lo cual $\cos(\mathrm{Arg}(z_1 \overline{z_2})) = 1/2$ y por ende $\mathrm{Arg}(z_1 \overline{z_2}) = \pm\pi/3$. Pero entonces con $\arg(z_1 \overline{z_2}) = \arg(z_1) + \arg(\overline{z_2}) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$ obtenemos $\arg(z_2) = \arg(z_1) \pm \pi/3$ y

$z_2 = |z_2| \exp(i \arg(z_2)) = |z_1| \exp(i \arg(z_1) \pm i\pi/3) = z_1 \exp(\pm i\pi/3)$ con lo cual se cumple (1) de donde surge que hay una sola raíz (que es el centro de masa).

El problema ilustra bien que el uso de números complejos puede ser muy eficiente para resolver problemas de geometría plana analítica.