Facultad de Matemática, Astronomía y Física, U.N.C.

Métodos Matemáticos de la Física I

Guía N° 1 (2015)

**Problema 1:** Escribir los siguientes números complejos en la forma $x + iy$ y dibujarlos.

*a)* $(2-3i)(2+3i)$ *b)* $\dfrac{(3+i)}{3-4i} - \dfrac{(2-i)}{8i}$ *c)* $(1-i)^4$

**Problema 2:** En cada caso determinar $\overline{z}$, $\mathrm{Re}(\,z)$ , $\mathrm{Im}(\,z)$ y $|z|$.

*a)* $z = 4i - 3$

*b)* $z = -2i$

*c)* $z = (4i)^2$

*d)* $z = \dfrac{-1+3i}{2-i}$

**Problema 3:** En cada caso hallar $\arg(z)$ y $\mathrm{Arg}(z)$

*a)* $z = \dfrac{-2}{1+\sqrt{3}i}$, *b)* $z = (\sqrt{3}-i)^6$.

**Problema 4:** Probar que

*a)* $\Big||z_1| - |z_2|\Big| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

*b)* $|z_1 - z_2| \leq |z_1 - z_3| + |z_2 - z_3|$

*c)* Si $|z_2| \neq |z_3|$ entonces $\left|\frac{z_1}{z_2+z_3}\right| \leq \frac{|z_1|}{||z_2|-|z_3||}$

**Problema 5:** Graficar en el plano los conjuntos definidos continuación. Determine en cada caso la frontera y el interior del conjunto.

*a)* $|z| = 1$

*b)* $\mathrm{Im}\,(z) = 0$

*c)* $|3z + 2| < 1$

*d)* $0 < \mathrm{Arg} z \leq \pi$

*e)* $\{\mathrm{Im}\,(z) \geq 2\} \cup \{\mathrm{Re}\,(z^2) > 0\}$

*f)* $\mathrm{Im}\,(z + 1/z) = 0$

**Problema 6:** Usar la forma polar para simplificar las siguientes expresiones. Hallar en cada caso el módulo y el argumento principal del resultado.

*a)* $i(1 - i\sqrt{3})(\sqrt{3} + i)$

*b)* $\dfrac{3}{(\sqrt{3}-i)^2}$

*c)* $(1+i)^3$

*d)* $i^5 \cdot i^3$

**Problema 7:**

*a)* Probar la identidad

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}, \qquad z \neq 1.$$

Ayuda: Tomar $s = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n$ y calcular $(1-z)s$.

*b)* Mostrar que si $c$ es una raíz n-ésima de la unidad, $c \neq 1$, entonces

$$1 + c + c^2 + \cdots + c^{n-1} = 0$$

**Problema 8:** Hallar todas las raíces de las siguientes ecuaciones y dibujarlas.

*a)* $z^5 - 32 = 0$

*b)* $z^2 - 2i = 0$

*c)* $z^3 + 1 = 0$

**Problema 9:** Hallar las raíces de la ecuación $z^4 + 4 = 0$ y usarlas para factorizar $z^4 + 4$ en producto de polinomios de grado dos con coeficientes reales.