Facultad de Matemática, Astronomía y Física, U.N.C.

Métodos Matemáticos de la Física I

Guía N° 2 (2015)

Problema 1: Representar gráficamente los siguientes conjuntos y determinar cuáles son abiertos y conexos (y por tanto, dominios), cuáles son acotados, y cuáles no son abiertos ni cerrados (analice además estas propiedades para los ejemplos del ejercicio 5 de la guía 1)

a) $|z-(2+i)| \leq 1$

b) $|z-4| \geq |z|$

c) $0 < \mathrm{Arg}(z) < \pi/4 \quad (z \neq 0)$

d) $\pi/4 < \mathrm{Arg}(z) \leq \pi/2 \quad (z \neq 0)$

Problema 2: Probar que la hipérbola $x^2-y^2=1$ puede ser escrita en la forma $z^2+\overline{z}^2=2$.

Problema 3: Usando el hecho de que $|z_1-z_2|$ es la distancia entre los puntos z_1 y z_2, decir qué curvas describen los siguientes conjuntos:

a) $|z-4i|+|z+4i|=10$

b) $|z-1|=|z+i|$.

Problema 4: Describir el dominio de definición de las siguientes funciones y dibujarlo:

a) $f(z)=\dfrac{\overline{z}-1}{z^2+i}$ *b)* $f(z)=\dfrac{1}{1-|z|^2}$ *c)* $f(z)=\dfrac{z}{z+\overline{z}}$

Problema 5: Toda sucesión compleja convergente es acotada y la sucesión formada por los módulos correspondientes es convergente. Demuestre este hecho que es de uso común y frecuente en el análisis complejo.

Problema 6: Expresar las siguientes funciones en la forma $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$:

a) $f(z)=z^3+z-1$

b) $f(z)=\dfrac{\overline{z}-1}{z^2+1}$

Problema 7: Pruebe que no existe el límite de la función $f(z)=(\sin(x)+i\sin(y))/(x-iy)$ cuando $z \to 0$.

Problema 8: Probar que si $f(z)$ y $g(z)$ son contínuas en $z_0 \in \mathbb{C}$ entonces las funciones $f+\alpha g$, fg y f/g cuando $g \neq 0$, son contínuas en z_0. Probar que la composición de funciones contínuas es contínua.

Problema 9: La función $z \mapsto z^3$ es claramente continua como producto de la función $z \mapsto z$ que es obviamente continua (pruébelo!). Dé una demostración directa usando que

$$z^3-w^3=(z-w)(z^2+w^2+zw)\ , z,w \in \mathbb{C}\ .$$

¿Puede delinear una estrategia para demostrar que cualquier potencia entera es continua?

Problema 10: Hallar los siguientes límites:

a) $\displaystyle\lim_{z\to i} \frac{iz^3-1}{z+i}$

b) $\displaystyle\lim_{z\to\infty} \frac{4z^2}{(z-1)^2}$

c) $\displaystyle\lim_{z\to\infty} \frac{z^2+1}{z+1}$

d) $\displaystyle\lim_{z\to 1-i} (z+2i\mathrm{Re}(z))$

Problema 11: Para cada una de las siguientes funciones complejas, usar las ecuaciones de Cauchy-Riemann para determinar si existe f'. Si existe la derivada, calcularla:

a) $f(z) = \overline{z}$

b) $f(z) = \overline{z}^2$

c) $f(z) = \mathrm{Im}(z)$

d) $f(z) = |z|^2$

e) $f(z) = iz + 2$

f) $f(z) = \dfrac{x}{x^2+y^2} + i\dfrac{y}{x^2+y^2}$

g) $f(z) = \exp(z)$

h) $f(z) = \cos x \,\cosh y + i \,\mathrm{sen}\, x \,\mathrm{senh}\, y$

i) $f(z) = \cos x \,\cosh y - i \,\mathrm{sen}\, x \,\mathrm{senh}\, y$

Problema 12: Sean $u(x,y)$ y $v(x,y)$ funciones de valores reales cuyas derivadas parciales de primer orden existen en un entorno ε de un punto $(x,y) \neq (0,0)$ y son contínuas en dicho punto.

a) Usando la transformación de coordenadas Cartesianas a polares y la regla de la cadena muestre que:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos(\theta) + \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{sen}(\theta), \qquad u_\theta = -\frac{\partial u}{\partial x} r\,\mathrm{sen}(\theta) + \frac{\partial u}{\partial y} r\cos(\theta).$$

b) Muestre que si las funciones u y v satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann (en Cartesianas) en (x,y) entonces satisfacen las ecuaciones

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \qquad \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\partial v}{\partial r}. \tag{1}$$

c) Recíprocamente, resuelva las ecuaciones del item (a) y sus similares para v despejando $\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial y$, $\partial v/\partial x$ y $\partial v/\partial y$ en función de $\partial u/\partial r$, $\partial u/\partial \theta$, $\partial v/\partial r$ y $\partial v/\partial \theta$ y muestre que si las ecuaciones (1) se satisfacen entonces se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann (en Cartesianas).

Problema 13: Considere una varilla (infinitamente larga y delgada) uniformemente cargada. El campo eléctrico en cualquier punto $\mathbf{r}$ es de magnitud inversamente proporcional a la distancia a la varilla y tiene como dirección a la perpendicular a la varilla que pasa por el punto.
Teniendo en cuenta la correspondencia entre el complejo $z = x + iy$ y el par cartesiano (x,y), considere un plano perpendicular a la varilla y

a) muestre que para cualquier punto z del plano el campo eléctrico puede escribirse como $E(z) = 1/(\overline{z} - \overline{z_o})$ —en unidades apropiadas— donde z_o es la posición de la varilla en el plano.

b) considere tres varillas paralelas idénticas ubicadas perpendicularmente en el plano en los puntos distintos z_1, z_2 y z_3. Determine los puntos donde el campo total se anula.

c) considere los casos particulares $z_1 = 0$, $z_2 = 1 + i$, $z_3 = 1 - i$ y $z_1 = 0$, $z_2 = 2$, $z_3 = -2$.

d) muestre que siempre hay dos puntos donde el campo se anula salvo en el caso donde las varillas están ubicadas en los vértices de un triángulo equilatero.