Facultad de Matemática, Astronomía y Física, U.N.C.

Métodos Matemáticos de la Física I – Análisis Matemático IV

Guía N° 3 (2015)

Problema 1: Sea f una función analítica en un dominio D abierto y conexo. Probar que:

a) Si $f'(z) = 0$, para todo $z \in D$ entonces f es constante.

b) Si $f(z) \in \mathbb{R}$ para todo $z \in D$ entonces f es constante.

c) Si $\mathrm{Re}(f(z)) = 0$ para todo $z \in D$ entonces f es constante.

Problema 2: Probar que las siguientes funciones $u(x, y)$ son armónicas y hallar una conjugada armónica $v(x, y)$:

a) $u(x, y) = y^3 - 3x^2y$ *b)* $u(x, y) = \cosh x \cos y$

Problema 3: Probar que las curvas de nivel de una función armónica y las curvas de nivel de su conjugada armónica son perpendiculares en todo punto donde sus gradientes no se anulan. Grafique cualiltativamente las curvas de nivel de las partes reales e imaginaria de $f(z) = z^2$.

Problema 4: Muestre que $\overline{\exp(z)} = \exp(\bar{z})$, y $|\exp(z^2)| \leq \exp(|z|^2)$.

Problema 5: Se definen las funciones trigonométricas de variable compleja como sigue:

$$\mathrm{sen}(z) = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}, \qquad \cos(z) = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2}.$$

Pruebe que

a) $\mathrm{sen}(-z) = -\mathrm{sen}(z)$, y $\cos(-z) = \cos(z)$.

b) $\mathrm{sen}^2(z) + \cos^2(z) = 1$.

c) $\mathrm{sen}(z_1 + z_2) = \mathrm{sen}(z_1)\cos(z_2) + \mathrm{sen}(z_2)\cos(z_1)$.

d) $\cos(z_1 + z_2) = \cos(z_1)\cos(z_2) - \mathrm{sen}(z_1)\,\mathrm{sen}(z_2)$.

e) Tanto $\mathrm{sen}(z)$ como $\cos(z)$ son periódicas con período real 2π.

Problema 6: Encuentre todas las raíces de $\cos(z)$.

Problema 7: Se definen las funciones hiperbólicas de variable compleja como sigue:

$$\mathrm{senh}(z) = \frac{\exp(z) - \exp(-z)}{2}, \qquad \cosh(z) = \frac{\exp(z) + \exp(-z)}{2}.$$

Pruebe que:

a) $\mathrm{senh}(-z) = -\mathrm{senh}(z)$ y $\cosh(-z) = \cosh(z)$.

b) $\cosh^2(z) - \mathrm{senh}^2(z) = 1$.

c) $\mathrm{senh}(z_1 + z_2) = \mathrm{senh}(z_1)\cosh(z_2) + \cosh(z_1)\,\mathrm{senh}(z_2)$.

d) $\cosh(z_1 + z_2) = \cosh(z_1)\cosh(z_2) + \mathrm{senh}(z_1)\,\mathrm{senh}(z_2)$.

e) $\operatorname{senh}(z) = \operatorname{senh}(x)\cos(y) + i\cosh(x)\operatorname{sen}(y)$.

f) $\cosh(z) = \cosh(x)\cos(y) + i\operatorname{senh}(x)\operatorname{sen}(y)$.

g) $|\operatorname{senh}(z)|^2 = \operatorname{senh}^2(x) + \operatorname{sen}^2(y)$.

h) $|\cosh(z)|^2 = \operatorname{senh}^2(x) + \cos^2(y)$.

Problema 8: Calcule y exprese en la forma $a + ib$, indicando cuantos valores distintos son en cada caso,

a) $(i^i)^i$ *b)* $\big(\operatorname{Log}(i)\big)^{(i\pi)}$ *c)* $\dfrac{\exp(iz)}{5} = \operatorname{senh}(iz)$.

Problema 9: Muestre que

a) $\log(i^{1/2})$ y $(1/2)\log(i)$ representan el mismo conjunto de valores.

b) $\log(i^2)$ y $2\log(i)$ NO representan el mismo conjunto de valores.

Problema 10: Muestre que para todos los puntos del semiplano complejo derecho ($z = x + iy$, $x > 0$) vale

$$\operatorname{Log}(z) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) + i\arctan\Big(\frac{y}{x}\Big).$$

Problema 11: Se define la inversa del $\operatorname{sen}(z)$ como todos los valores $w \in \mathbb{C}$ tales que $\operatorname{sen}(w) = z$. Muestre que

$$\operatorname{arc\,sen}(z) = -i\log\Big(iz + (1 - z^2)^{1/2}\Big).$$

Problema 12: Muestre que $\displaystyle\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = -\int_{z_2}^{z_1} f(z)dz$ usando el mismo camino de integración pero en sentido inverso.

Problema 13: Considere los puntos Γ del plano complejo determinados por $w(t) = t^3 + it^6$ para $-1 \le t \le 1$. Encuentre una función compleja inyectiva $z : [-1, 1] \to \mathbb{C}$ de modo que $z'(t)$ este definida y no se anule para todo $t \in [-1, 1]$ y que $\Gamma = \{z(t) : -1 \le t \le 1\}$.

Problema 14: Calcule la integral

$$\int_\gamma \overline{z}^2\, dz$$

donde γ es el camino cerrado determinado por el perímetro del triángulo de vértices $z_1 = 0$, $z_2 = 2$ y $z_3 = 2 + 2i$ recorrido en el sentido $z_1 \to z_2 \to z_3 \to z_1$.

Problema 15: Encuentre una cota superior para el módulo de la integral

$$\int_C \frac{\exp(z)}{z^2 + i}\, dz$$

donde C es el círculo de radio 2 y centro 0 recorrido en sentido horario una vez.

Problema 16: Determine $\int_\gamma (1/z)\, dz$ donde γ es cualquier camino que une a $z_1 = -3i$ con $z_2 = 1 + 3i$ en el semi-plano $\{z : \operatorname{Re}(z) > 0\}$.

Problema 17: Muestre que si f es analítica en el disco abierto $D(0, 1)$ con $|f'(z)| \le M$ ($z \in D(0, 1)$) entonces $|f(z_2) - f(z_1)| \le M|z_2 - z_1|$ para $z_2, z_1 \in D(0, 1)$.

Problema 18: Dado $z_o \in \mathbb{C}$ y un circulo C orientado positivamente que encierre a z_o, considere la semirecta horizontal $\{z : \operatorname{Arg}(z - z_o) = \pi\}$. Sea z_1 el (único) punto de C con

$\text{Arg}(z_1 - z_o) = \pi$ y, refiriendose a la figura, considere puntos α y β de C distintos de z_1 con $\text{Arg}(\alpha) > 0$ y $\text{Arg}(\beta) < 0$. Calcule

$$\int_{C_{\beta\to\alpha}} \frac{dz}{z - z_o}$$

y haciendo los límites $\alpha \to z_1$ y $\beta \to z_1$ determine $\int_C dz/(z - z_o)$.