Facultad de Matemática, Astronomía y Física, U.N.C.

Métodos Matemáticos de la Física I

Guía N° 8 (2015)

Problema 1: Considere un espacio vectorial complejo $\mathcal{H}$ con producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ y sea $\|u\| := \sqrt{\langle u, u\rangle}$.

a) Muestre que se tiene la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \, \|y\| \; , \quad x, y \in \mathcal{H} \; ,$$

con igualdad si y sólo si x e y son linealmente dependientes.
Sugerencia: Considere el vector $z := y - \|x\|^{-2}\langle x, y\rangle x$ y calcule su norma.

b) Use la desigualdad de Cauchy-Schwarz para demostrar la desigualdad del triángulo para $\|\cdot\|$:

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \; , \quad x, y \in \mathcal{H} \; .$$

Problema 2: Considere un espacio vectorial complejo con producto escalar. Si $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ son n (≥ 1) vectores escribimos $[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ para el subespacio de las combinaciones lineales de estos vectores; o sea: $[x_1, x_2, \cdots, x_n] := \{\sum_{j=1}^n c_j x_j : c_1, c_2, \cdots, c_n \in \mathbb{C}\}$.

a) Verifique que la dimensión de $[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ es menor o igual a n con igualdad si y sólo si los vectores $\{x_j : j = 1, 2, \cdots, n\}$ son linealmente independientes.

Para cualquier $x \in \mathcal{H}$ **no nulo** sea P_x el mapa de $\mathcal{H}$ en $\mathcal{H}$ dado por

$$P_x y := \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|^2} \, x \; , \quad y \in \mathcal{H} \; .$$

b) Verifique que:

1) P_x es lineal;

2) P_x es una proyección –vale decir $P_x \circ P_x = P_x$;

3) Se cumple $\langle P_x z, y\rangle = \langle z, P_x y\rangle$ para $y, z \in \mathcal{H}$;

4) El vector y es ortogonal a x si y sólo si $P_x y = 0$.

c) Demuestre de que entre todos los vectores αx con $\alpha \in \mathbb{C}$ (esto es exactamente $[x]$) aquel de menor distancia a un dado $y \in \mathcal{H}$ es exactamente $P_x y$.

d) Demuestre que si $\langle x, y\rangle = 0$ entonces $P_x \circ P_y = 0$ y $P_x + P_y$ es una proyección lineal cuyo rango es el subespacio bi-dimensional generado por x e y, o sea $[x, y]$. Deduzca que si $\{e_j : j = 1, 2, \cdots, n\}$ es un conjunto de vectores normalizados y dos-a-dos ortogonales (i.e., $\langle e_j, e_k\rangle = \delta_{j,k}$) entonces $P := P_{e_1} + P_{e_2} + \cdots + P_{e_n}$ es una proyección lineal cuyo rango es el subespacio n-dimensional $[e_1, e_2, \cdots, e_n]$ de $\mathcal{H}$ y verifique que (Teorema de Pitagoras en n-dimensiones)

$$\|Px\|^2 = \sum_{j=1}^n \|P_{e_j} x\|^2 = \sum_{j=1}^n |\langle e_j, x\rangle|^2 \; , \quad x \in \mathcal{H} \; .$$

e) Muestre que si $\{e_j : j = 1, 2, \cdots, n\}$ y $\{f_j : j = 1, 2, \cdots, n\}$ son dos conjuntos de n vectores normalizados y dos-a-dos ortogonales tales que $[e_1, e_2, \cdots, e_n] = [f_1, f_2, \cdots, f_n]$ entonces $P_{e_1} + P_{e_2} + \cdots + P_{e_n} = P_{f_1} + P_{f_2} + \cdots + P_{f_n}$.

f) Generalize b): Entre todos los vectores de $[e_1, e_2, \cdots, e_n]$ donde los n vectores e_j están normalizados y son dos-a-dos ortogonales aquel que tiene la menor distancia a un dado vector y es único y es Py.

g) Construya un ejemplo de una proyección lineal Q tal que el rango de Q es unidimensional pero (vea b)3))

$$\langle Qz, y\rangle \neq \langle z, Qy\rangle$$

para algún par de vectores z, y en $\mathcal{H}$.
Sugerencia: busque en $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$ con el producto escalar usual.