FACULTAD DE MATEMÁTICA, ASTRONOMÍA Y FÍSICA, U.N.C.

Métodos Matemáticos de la Física I

Guía N° 8 (2015) – Soluciones[1]

Problema 1: Considere un espacio vectorial complejo $\mathcal{H}$ con producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ y sea $\|u\| := \sqrt{\langle u, u\rangle}$.

a) Muestre que se tiene la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\| \ , \ \ x, y \in \mathcal{H} \ ,$$

con igualdad si y sólo si x e y son linealmente dependientes.
Sugerencia: Considere el vector $z := y - \|x\|^{-2}\langle x, y\rangle x$ y calcule su norma.

b) Use la desigualdad de Cauchy-Schwarz para demostrar la desigualdad del triángulo para $\|\cdot\|$:

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \ , \ \ x, y \in \mathcal{H} \ .$$

Solución:

a) Si $x = 0$ entonces la desigualdad es una igualdad y $\alpha.x + 0.y = 0$ con $\alpha \in \mathbb{C}$ de modo que los vectores son linealmente dependientes.

Supongase que $x \neq 0$. Entonces $\|x\| > 0$ y con $z := y - \|x\|^{-2}\langle x, y\rangle x$, tenemos

$$\begin{aligned} 0 \leq \|z\|^2 &= \langle y - \|x\|^{-2}\langle x, y\rangle x, y - \|x\|^{-2}\langle x, y\rangle x\rangle \\ &= \langle y, y\rangle - \|x\|^{-2}\langle x, y\rangle\langle y, x\rangle - \|x\|^{-2}\overline{\langle x, y\rangle}\langle x, y\rangle + \|x\|^{-4}|\langle x, y\rangle|^2\langle x, x\rangle \\ &= \|y\|^2 - \|x\|^{-2}|\langle x, y\rangle| \ ; \end{aligned}$$

y la desigualdad se obtiene inmediatamente multiplicando por $\|x\|^2$ y luego tomando la raíz cuadrada positiva (que es monótona creciente). Además hay igualdad, si y sólo si $\|z\| = 0$ o, equivalentemente, $z = 0$ que nos dice que $y = \|x\|^{-2}\langle x, y\rangle x$ de donde se desprende que y y x son linealmente dependientes. Para completar las afirmaciones falta ver que –siempre suponiendo $x \neq 0$– si x e y son linealmente dependientes entonces se tiene igualdad. Pero, si $\alpha x + \beta y = 0$ con α y β no ambos cero; entonces $\beta \neq 0$ pues sino $\alpha x = 0$ de donde $\alpha = 0$ ya que $x \neq 0$. Luego $y = -(\alpha/\beta)x$ y entonces $\|y\| = |\alpha/\beta|\,\|x\|$ y

$$|\langle x, y\rangle| = |-(\alpha/\beta)\langle x, x\rangle| = |\alpha/\beta|\|x\|^2 = \|y\|\,\|x\| \ .$$

Esta es la demostración geométrica (que prefiero pues da la condición para igualdad inmediatamente) y se basa en que el vector z es lo que le falta a la proyección (ortogonal) de y sobre x para ser y (vea el próximo problema). Hay una demostración "analítica" canónica. Suponga que $x \neq 0$ y considere para $(t, s) \in \mathbb{R}^2$

$$f(t, s) := \|y - (t + is)x\|^2 = \|y\|^2 + (t^2 + s^2)\|x\|^2 - 2t\mathrm{Re}(\langle x, y\rangle) - 2s\mathrm{Im}(\langle x, y\rangle) \ .$$

Entonces $f(t, s) \geq 0$ y

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, s) = 2t\|x\|^2 - 2\mathrm{Re}(\langle x, y\rangle) \ , \ \ \frac{\partial f}{\partial s}(t, s) = 2s\|x\|^2 - 2\mathrm{Im}(\langle x, y\rangle) \ .$$

[1] G.A.R.

El único punto extremal de f es entonces (t_o, s_o) con $t_o = \mathrm{Re}(\langle x, y\rangle)/\|x\|^2$ y $s_o = \mathrm{Im}(\langle x, y\rangle)/\|x\|^2$. Se tiene

$$0 \leq f(t_o, s_o) = \|y\|^2 - \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\|x\|^2} \ ,$$

de donde se desprende la desigualdad.
Esto también puede usarse para atacar el Problema 2c) que sigue si se observa que la función $(t, s) \mapsto f(t, s)$ es convexa y por ende (t_o, s_o) es un mínimo absoluto de donde $f(t, s) \geq f(t_o, s_o)$; y que además $t_o + is_o = \|x\|^{-2}\langle x, y\rangle$.

b) Se tiene

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\mathrm{Re}(\langle x, y\rangle) \ .$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\|x\| \, \|y\| \geq |\langle x, y\rangle| = \sqrt{[\mathrm{Re}(\langle x, y\rangle)]^2 + [\mathrm{Im}(\langle x, y\rangle)]^2} \geq \sqrt{[\mathrm{Re}(\langle x, y\rangle)]^2} = |\mathrm{Re}(\langle x, y\rangle)| \ ,$$

y entonces

$$\mathrm{Re}(\langle x, y\rangle) \leq |\mathrm{Re}(\langle x, y\rangle)| \leq \|x\| \, \|y\| \ ;$$

de modo que

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\mathrm{Re}(\langle x, y\rangle) \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \, \|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2 \ ,$$

de donde obtenemos la desigualdad del triángulo tomando la raíz cuadrada positiva.

Problema 2: Considere un espacio vectorial complejo con producto escalar. Si $x_1, x_2, \cdots, x_n$ son n (≥ 1) vectores escribimos $[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ para el subespacio de las combinaciones lineales de estos vectores; o sea: $[x_1, x_2, \cdots, x_n] := \{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \, : \, c_1, c_2, \cdots, c_n \in \mathbb{C}\}$.

a) Verifique que la dimensión de $[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ es menor o igual a n con igualdad si y sólo si los vectores $\{x_j \, : \, j = 1, 2, \cdots, n\}$ son linealmente independientes.

Para cualquier $x \in \mathcal{H}$ **no nulo** sea P_x el mapa de $\mathcal{H}$ en $\mathcal{H}$ dado por

$$P_x y := \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|^2} \, x \ , \quad y \in \mathcal{H} \ .$$

b) Verifique que:

1) P_x es lineal;
2) P_x es una proyección –vale decir $P_x \circ P_x = P_x$;
3) Se cumple $\langle P_x z, y\rangle = \langle z, P_x y\rangle$ para $y, z \in \mathcal{H}$;
4) El vector y es ortogonal a x si y sólo si $P_x y = 0$.

c) Demuestre de que entre todos los vectores αx con $\alpha \in \mathbb{C}$ (esto es exactamente $[x]$) aquel de menor distancia a un dado $y \in \mathcal{H}$ es exactamente $P_x y$.

d) Demuestre que si $\langle x, y\rangle = 0$ entonces $P_x \circ P_y = 0$ y $P_x + P_y$ es una proyección lineal cuyo rango es el subespacio bi-dimensional generado por x e y, o sea $[x, y]$. Deduzca que si $\{e_j \, : \, j = 1, 2, \cdots, n\}$ es un conjunto de vectores normalizados y dos-a-dos ortogonales (i.e., $\langle e_j, e_k\rangle = \delta_{j,k}$) entonces $P := P_{e_1} + P_{e_2} + \cdots + P_{e_n}$ es una proyección lineal cuyo rango es el subespacio n-dimensional $[e_1, e_2, \cdots, e_n]$ de $\mathcal{H}$ y verifique que (Teorema de Pitagoras en n-dimensiones)

$$\|Px\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \|P_{e_j} x\|^2 = \sum_{j=1}^{n} |\langle e_j, x\rangle|^2 \ , \quad x \in \mathcal{H} \ .$$

e) Muestre que si $\{e_j : j = 1, 2, \cdots, n\}$ y $\{f_j : j = 1, 2, \cdots, n\}$ son dos conjuntos de n vectores normalizados y dos-a-dos ortogonales tales que $[e_1, e_2, \cdots, e_n] = [f_1, f_2, \cdots, f_n]$ entonces $P_{e_1} + P_{e_2} + \cdots + P_{e_n} = P_{f_1} + P_{f_2} + \cdots + P_{f_n}$.

f) Generalice c): Entre todos los vectores de $[e_1, e_2, \cdots, e_n]$ donde los n vectores e_j están normalizados y son dos-a-dos ortogonales aquel que tiene la menor distancia a un dado vector y es único y es Py.

g) Construya un ejemplo de una proyección lineal Q tal que el rango de Q es unidimensional pero (vea b)3))

$$\langle Qz, y\rangle \neq \langle z, Qy\rangle$$

para algún par de vectores z, y en $\mathcal{H}$.
Sugerencia: busque en $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$ con el producto escalar usual.

Solución:

a) Todo vector de $X := [x_1, x_2, \cdots, x_n]$ es de la forma $x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j$. Si los $\{x_j\}$ son linealmente independientes entonces, por definición, constituyen una base de X. Como todas las bases (finitas) tienen la misma cantidad de elementos y este número es, por definición, la dimensión, la dimensión de X es n. Si en cambio, los vectores no son linealmente independientes, entonces alguno de ellos –digamos x_k– es combinación lineal de los demás; reenumerando los vectores $y_j = x_j$ para $k \neq j \neq n$ y $y_k = x_n$ se tiene $[y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}] = X$. Si ahora los $\{y_j\}$ son linealmente independientes entonces son base de X y $dim(X) = n - 1$; en caso contrario eliminamos un vector linealmente dependiente de los demás y iterando vamos reduciendo la dimensión de X por 1 en cada paso. Como hay finitos vectores $\{x_j\}$ obtenemos $1 \leq dim(X) \leq n$.

Hemos usado que dos bases del mismo EV tienen la misma cantidad de elementos (esto se mencionó en clase). Esto es cierto en general (dimensión no finita), pero veamos el caso finito.

Teorema: Si un espacio vectorial V tiene una base finita entonces todas las bases tienen la misma cantidad de vectores.

Para demostrar esto usamos el siguiente resultado que debería ser familiar:

Lema: Si $\{x_j : j = 1, 2, \cdots, n\}$ son $n \geq 1$ vectores linealmente independientes en un EV y $\{c_{j,k} : 1 \leq j, k \leq n\}$ son $n \times n$ escalares arbitrarios entonces los n vectores

$$y_j := \sum_{k=1}^{n} c_{j,k} x_k \ , \ \ j = 1, 2, \cdots, n \ ,$$

son linealmente independientes si y sólo si la $(n \times n)$-matriz C de elementos $C_{j,k} = c_{j,k}$ es invertible.
Demostración: Suponga que se tiene $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j y_j = 0$ para n escalares $\{\alpha_j : j = 1, 2, \cdots, n\}$. Entonces

$$0 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j y_j = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} C_{j,k} \alpha_j \right) x_k$$

y la independencia lineal de $\{x_j\}$ implica que

$$\sum_{j=1}^{n} C_{j,k} \alpha_j = 0 \ , \ \ k = 1, 2, \cdots, n \ ;$$

o, lo que es lo mismo

$$C^t\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}\ ,$$

donde C^t denota la matriz traspuesta de C. Si C es invertible entonces C^t –ya que $det(C^t) = det(C) \neq 0$– también lo es[2]. Pero entonces

$$\boldsymbol{\alpha} = (C^t)^{-1}C^t\boldsymbol{\alpha} = (C^t)^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}\ ,$$

y esto demuestra que $\{y_j\}$ es linealmente independiente. Si C no es invertible entonces C^t tampoco lo es y hay $\boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{C}^n$ con $\boldsymbol{\gamma} \neq \mathbf{0}$ y $C^t\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0}$. Entonces $\sum_{j=1}^n \gamma_j y_j = 0$ y no todos los γ_j se anulan de modo que $\{y_j\}$ es linealmente dependiente[3].

Demostración del Teorema: Suponga que hay una base finita (de $n \geq 1$ vectores) $\{x_j : j = 1, 2, \cdots, n\}$ o sea $[x_1, x_2, \cdots, x_n] = V$. Sea $\{y_\alpha : \alpha \in A\}$ otra base de X (A es acá un conjunto arbitrario que se usa para identificar los vectores). Entonces (se trata de una base) cualquiera sea el subconjunto finito F de A, el conjunto $\{y_\alpha : \alpha \in F\}$ es linealmente independiente.
Supongase que A admite un subconjunto (finito) K de $n+1$ elementos. Podemos enumerar estos elementos $\alpha \in K$ como $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n+1}$ y abreviamos $y_j := y_{\alpha_j}$ para $j = 1, 2, \cdots, n+1$. Ahora, como $\{x_j : j = 1, 2, \cdots, n\}$ es una base, hay escalares $\{\beta_{k,j} : j = 1, 2, \cdots, n\ ;\ k = 1, 2, \cdots, n+1\}$ de modo que

$$y_k = \sum_{j=1}^n \beta_{k,j}x_j\ ,\quad k = 1, 2, \cdots, n+1\ .$$

Ya que los n vectores $y_1, y_2, \cdots, y_n$ son linealmente independientes (pues están contenidos en el conjunto $\{y_1, y_2, \cdots, y_{n+1}\}$ que es linealmente independiente), la matriz $(n \times n)$

$$B = \begin{pmatrix} \beta_{1,1} & \beta_{1,2} & \cdots & \beta_{1,n} \\ \beta_{1,1} & \beta_{1,2} & \cdots & \beta_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \beta_{n,1} & \beta_{n,2} & \cdots & \beta_{n,n} \end{pmatrix}\ ,$$

es invertible con inversa C. Entonces

$$x_j = \sum_{k=1}^n C_{j,k}y_k\ ,\quad j = 1, 2, \cdots, n\ .$$

Por lo tanto

$$y_{n+1} = \sum_{j=1}^n \beta_{n+1,j}x_j = \sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n \beta_{n+1,j}C_{j,k}y_k = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n C_{j,k}\beta_{n+1,j}\right) y_k$$

y esto verifica que el conjunto $\{y_\alpha : \alpha \in K\} = \{y_1, y_2, \cdots, y_{n+1}\}$ es linealmente dependiente. Esta contradicción muestra que la suposición de existencia de K es falsa y entonces A tiene necesariamente n elementos o menos. Pero, si tuviere menos, entonces invirtiendo los roles de $\{x_j\}$ y $\{y_\alpha\}$ en el argumento que acabamos de hacer obtendriamos que la cantidad de elementos de A (que sabemos finita) es mayor o igual a n. Entonces A debe tener n elementos.

[2]Y es inmediato que $(C^t)^{-1} = (C^{-1})^t$

[3]Si $\gamma_{j_o} \neq 0$ entonces $y_{j_o} = -\gamma_{j_o}^{-1}\sum_{j=1\ ,\ j\neq j_o}^n \gamma_j y_j$.

b) Tenemos

$$P_x(\alpha y + z) = \|x\|^{-2}\langle x, \alpha y + z\rangle\, x = \|x\|^{-2}(\langle x, \alpha y\rangle + \langle x + z\rangle)\, x$$

$$= \|x\|^2(\alpha\langle x, y\rangle\, x + \langle x, z\rangle\, x) = \alpha P_x y + P_x z\ ,$$

lo que verifica la linealidad.
También,

$$(P_x \circ P_x)y = P_x(P_x y) = \|x\|^{-2}\langle x, P_x y\rangle\, x = \|x\|^{-2}\langle x, [\|x\|^{-2}\langle x, y\rangle x]\rangle\, x$$

$$= \|x\|^{-4}\langle x, y\rangle\langle x, x\rangle\, x = \|x\|^{-2}\langle x, y\rangle\, x = P_x y$$

de modo que P_x es una proyección (es idempotente).
Ya que

$$\langle P_x z, y\rangle = \langle \|x\|^{-2}\langle x, z\rangle x, y\rangle = \overline{\langle x, z\rangle}\|x\|^{-2}\langle x, y\rangle = \langle z, x\rangle\|x\|^{-2}\langle x, y\rangle$$

$$= \langle z, [\|x\|^{-2}\langle x, y\rangle x]\rangle = \langle z, P_x y\rangle\ ,$$

P_x resulta ser auto-adjunto.
Por último, puesto que $x \neq 0$, para que $P_x y = 0$ basta y sobra con que $\langle x, y\rangle = 0$.

c) Sea $z := P_x y$, que está en $[x]$. Verificamos que $y - z$ es ortogonal a $z - \alpha x$ cualquiera sea el complejo α:

$$\langle y - z, z - \alpha x\rangle = \langle y, z\rangle - \alpha\langle y, x\rangle - \langle z, z\rangle + \alpha\langle z, x\rangle$$

$$= \|x\|^{-2}|\langle x, y\rangle|^2 - \alpha\langle y, x\rangle - \|x\|^{-2}|\langle x, y\rangle|^2 + \alpha\langle y, x\rangle = 0\ ;$$

pero entonces por el Teorema de Pitágoras,

$$\|y - \alpha x\|^2 = \|y - z + (z - \alpha)\|^2 = \|y - z\|^2 + \|z - \alpha x\|^2 \geq \|y - z\|^2$$

con igualdad si y sólo si $\|z - \alpha x\| = 0$ o sea si y sólo si $z = \alpha x$ lo que es equivalente a $\alpha = \|x\|^{-2}\langle x, y\rangle$.

d) Suponga que $\langle x, y\rangle = 0$ pero ambos vectores son no-nulos. Entonces

$$(P_x \circ P_y)z = \|x\|^{-2}\langle x, P_y z\rangle x = \|x\|^{-2}\langle x, \|y\|^{-2}\langle y, z\rangle y\rangle\, x$$

$$= \|x\|^{-2}\, \|y\|^{-2}\langle y, z\rangle\langle x, y\rangle x = 0$$

y del mismo modo $P_y \circ P_x = 0$. Considere $P := P_x + P_y$; entonces P es claramente lineal como suma de dos operaciones lineales; además,

$$P \circ P = (P_x + P_y) \circ (P_x + P_y) = P_x \circ P_x + P_x \circ P_y + P_y \circ P_y + P_y \circ P_y = P_x + P_y = P$$

y P es una proyección. Aunque no se pide verificarla, la propiedad $\langle Pz, v\rangle = \langle z, Pv\rangle$ también se satisface. Observe ahora que $P_x y = P_y x = 0$, que $P_x x = x$ y que $P_y y = y$ como se verifica calculando directamente con la definición de estos proyectores. Si $z = \alpha x + \beta y$ entonces

$$Pz = (P_x + P_y)(\alpha x + \beta y) = \alpha P_x x + \beta P_x y + \alpha P_y x + \beta P_y y = \alpha x + \beta y = z\ ,$$

de modo que P actua como la identidad en el subespacio $[x, y]$. Por otro lado, cualquiera sea el vector z se tiene

$$Pz = P_x z + P_y z = \|x\|^{-2}\langle x, z\rangle\, x + \|y\|^{-2}\langle y, z\rangle\, y$$

de modo que P aplica todo vector en un vector en $[x,y]$.

Lo que se acaba de hacer se puede generalizar a un conjunto finito arbitrario de vectores dos-a-dos ortogonales $\{x_j : j=1,2,\cdots,n\}$ que son automáticamente linealmente independientes pues, si $\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j = 0$ entonces

$$0 = \langle x_k, \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j \rangle = \sum_{j=1}^n \alpha_j \langle x_k, x_j \rangle = \alpha_k \|x_k\|^{-2}$$

de donde $\alpha_k = 0$ y esto para cualquiera de los n posibles k. Si además los vectores están normalizados $\langle e_j, e_k\rangle = \delta_{j,k}$ entonces $P_{e_j}x = \langle e_j, x\rangle e_j$, $\|P_{e_j}x\|^2 = |\langle e_j, x\rangle|^2$, y $P_{e_j} \circ P_{e_k} = \delta_{j,k} P_{e_j}$. Ahora, con $P = \sum_{j=1}^n P_{e_j}$ tenemos

$$\|Px\|^2 = \|\sum_{j=1}^n P_{e_j}x\|^2 = \sum_{j,k=1}^n \langle P_{e_j}x, P_{e_k}x\rangle = \sum_{j,k=1}^n \langle x, e_j\rangle \, \langle e_k, x\rangle \langle e_j, e_k\rangle$$

$$= \sum_{j=1}^n \langle x, e_j\rangle \, \langle e_j, x\rangle = \sum_{j=1}^n |\langle x, e_j\rangle|^2 = \sum_{j=1}^n \|P_{e_j}x\|^2 \ .$$

e) Sean $P := \sum_{j=1}^n P_{e_j}$ y $Q := \sum_{j=1}^n P_{f_j}$. De la identidad de los subespacios generados tenemos que $e_k \in [f_1, f_2, \cdots, f_n]$ y por ende

$$e_k = \sum_{j=1}^n \langle f_j, e_k\rangle f_j \ , \quad k = 1, 2, \cdots, n \ .$$

Entonces

$$\delta_{j,k} = \langle e_j, e_k\rangle = \langle \sum_{\ell=1} \langle f_\ell, e_j\rangle f_\ell, \sum_{m=1}^n \langle f_m, e_k\rangle f_m \rangle$$

$$= \sum_{\ell,m=1}^n \langle e_j, f_\ell\rangle \langle f_m, e_k\rangle \langle f_\ell, f_m\rangle = \sum_{\ell=1}^n \langle e_j, f_\ell\rangle \langle f_\ell, e_k\rangle \ ,$$

y por ende

$$Qx = \sum_{j=1}^n \langle f_j, x\rangle f_j = \sum_{j,k,\ell=1}^n \overline{\langle e_k, f_j\rangle} \langle e_k, x\rangle \langle e_\ell, f_j\rangle e_\ell$$

$$= \sum_{k,\ell=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \langle e_\ell, f_j\rangle \langle f_j, e_k\rangle \right) \langle e_k, x\rangle e_\ell$$

$$= \sum_{k,\ell=1}^n \delta_{k,\ell} \langle e_k, x\rangle e_\ell = \sum_{k=1}^n \langle e_k, x\rangle e_k = Px \ .$$

f) Dado cualquier vector y considere $z := Py$ y sea $x \in [e_1, e_2, \cdots, e_n]$ arbitrario. Tenemos $x = \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j$, Verificamos que $y - z$ es ortogonal a $z - x$:

$$\langle y - z, z - x\rangle = \langle y, z\rangle - \langle y, x\rangle - \|z\|^2 + \langle z, x\rangle$$

$$= \sum_{j=1}^n \langle y, e_j\rangle \langle e_j, y\rangle - \sum_{j=1}^n \alpha_j \langle y, e_j\rangle - \sum_{j=1}^n |\langle e_j, y\rangle|^2 + \sum_{j,k=1}^n \langle y, e_j\rangle \alpha_k \langle e_j, e_k\rangle$$

$$= -\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \langle y, e_j \rangle + \sum_{j=1}^{n} \langle y, e_j \rangle \alpha_j = 0 \; .$$

Ergo, por el Teorema de Pitagoras,

$$\|y - x\|^2 = \|y - z + (z - x)\|^2 = \|y - z\|^2 + \|z - x\|^2 \geq \|y - z\|^2$$

con igualdad si y sólo si $x = z$.

g) Considere el espacio vectorial complejo $\mathbb{C}^2$. Escribimos $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ para el vector general de $\mathbb{C}^2$.

Buscamos una proyección lineal Q de modo que el rango de Q sea uni-dimensional; digamos $[e]$. Sin perdida de generalidad, podemos suponer que

$$e = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \; .$$

Sea f cualquier vector tal que el par $\{e, f\}$ es linealmente independiente. La independencia lineal de e con f quiere decir que para α y β complejos

$$\alpha e + \beta f = 0 \iff \alpha + \beta f_1 = \beta f_2 = 0 \implies \alpha = \beta = 0 \; .$$

En particular, $f_2 \neq 0$ pues sino β arbitrario no nulo y $\alpha = -\beta f_1$ nos dan una instancia donde la implicación no es válida. Pero entonces, si $f_2 \neq 0$, dado $x \in \mathbb{C}^2$ arbitrario tenemos

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \left(x_1 - \frac{x_2 f_1}{f_2} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{x_2}{f_2} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \left(x_1 - \frac{x_2 f_1}{f_2} \right) e + \frac{x_2}{f_2} f \; .$$

Sea

$$Qx := \begin{pmatrix} x_1 - \frac{x_2 f_1}{f_2} \\ 0 \end{pmatrix} = \left(x_1 - \frac{x_2 f_1}{f_2} \right) e \; ;$$

entonces

$$(Q \circ Q)x = \begin{pmatrix} (Qx)_1 - \frac{(Qx)_2 f_1}{f_2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - \frac{x_2 f_1}{f_2} \\ 0 \end{pmatrix} = Qx \; .$$

O sea que Q es un proyector y su rango es el subespacio uni-dimensional $[e]$. Pero

$$\langle Qz, y \rangle = (\overline{z_1} - \frac{\overline{z_2}\,\overline{f_1}}{\overline{f_2}}, 0) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \left(\overline{z_1} - \frac{\overline{z_2}\,\overline{f_1}}{\overline{f_2}} \right) y_1 \; ,$$

$$\langle z, Qy \rangle = (\overline{z_1}, \overline{z_2}) \begin{pmatrix} y_1 - \frac{y_2 f_1}{f_2} \\ 0 \end{pmatrix} = \overline{z_1} \left(y_1 - \frac{y_2 f_1}{f_2} \right) \; ,$$

y estos números son distintos salvo para vectores y y z particulares.

Una alternativa para determinar a Q (dados e y f) es plantear

$$Q = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

y determinar las entradas matriciales a, b, c, d de modo que

$$Qe = e \; , \quad Qf = 0 \; .$$

Entonces se obtiene inmediatamente de la primera condición

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$$

de modo que $a = 1$ y $c = 0$; y de la segunda $d = 0$ y $b = -f_1/f_2$. O sea:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -f_1/f_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Observe que esta matriz es autoadjunta o simétrica (se cumple la condición de b)3)) si y sólo si $f_1 = 0$ lo que es equivalente a que $f = \begin{pmatrix} 0 \\ f_2 \end{pmatrix}$ o sea que f sea ortogonal a e. De hecho este es un resultado totalmente general: *Dado un subespacio cerrado $\mathcal{E}$ de un EV $\mathcal{H}$ con producto escalar hay exactamente una sola entre todas las proyecciones P con $P(\mathcal{H}) = \mathcal{E}$ tal que el complemento ortogonal de $\mathcal{E}$ es $(id - P)(\mathcal{E})$. Esta proyección es la llamada proyección ortogonal (sobre $\mathcal{E}$) que es la única que cumple con $P(\mathcal{H}) = \mathcal{E}$ y con $\langle Px, y\rangle = \langle x, Py\rangle$ para todo par x, y de vectores en $\mathcal{H}$.*