Facultad de Matemática, Astronomía y Física, U.N.C.

Métodos Matemáticos de la Física I

Guía 9 – Problema 2g)– Solución[1]

Se quiere resolver la EDO

$$y' = \frac{1+3x^2}{3y^2-6y}\ ,\quad y(0)=1\ .$$

Esta es no-lineal, separable y de primer orden. La integración produce

$$G(y) := y^3 - 3y^2 + C = x + x^3 =: H(x)\ ,$$

donde C es una constante. Ya que $H(0)=0$ y $G(1)=-2+C$ obtenemos $C=2$. Entonces

$$G(y) = y^3 - 3y^2 + 2 = (y-1)(y^2-2y-2) = (y-1)(y-\alpha^+)(y-\alpha^-)\ ,$$

donde $\alpha^\pm = 1 \pm \sqrt{3}$ son las raices (ceros) de $y \mapsto y^2-2y-2$. El análisis de la función G es inmediato con $G'(y)=3y^2-6y$ y $G''(y)=6(y-1)$. La función G es creciente en el intervalo $(-\infty,0]$ con un cero en α^-; decreciente en $[0,2]$ con un cero en 1; y creciente en $[2,\infty)$ con un cero en α^+. Además es cóncava en $(-\infty,1]$ (0 es un máximo local con $G(0)=2$) y convexa en $[1,\infty)$ (2 es un mínimo local con $G(2)=-2$).
La función H con $H'(x)=3x^2+1$ y $H''(x)=6x$ es impar y creciente con $\lim_{x\to\pm\infty} H(x) = \pm\infty$ de modo que H es una biyección de $\mathbb{R}$. Observamos que $H(\pm 1)=\pm 2$.

La función $y(x)$ está determinada implicitamente por

$$G(y) = H(x) \tag{1}$$

y ya que $G'(y)=0$ solamente para $y=0$ o $y=2$, el Teorema de la Función implicita nos garantiza la existencia de una única función $y(x)$ definida en un entorno de $x=0$ con $y(0)=1$ que es diferenciable con

$$y'(x) = \frac{H'(x)}{G'(y)}$$

de donde $y(\cdot)$ es solución única del problema de Cauchy en ese entorno de $x=0$.

La discusión cualitativa de y en función de $h := H(x)$ puede hacerse graficamente; vea la figura 1.

Si h varia en el intervalo $[-2,2]$ (que contiene a $h=0$) entonces y varia en el intervalo $[0,2]$ y la función $h \mapsto \xi(h) = y(x)$ es monótona decreciente con $\xi(-2)=y(-1)=2$ y $\xi(2)=y(1)=0$. La función $[-1,1] \ni x \mapsto y(x)$ es monótona decreciente y es solución del problema de Cauchy dado. Se tiene

$$\lim_{x\to\pm 1} 3y(x)^2 - 6y(x) = \lim_{x\to\pm 1} G'(y(x)) = 0\ ,\quad \lim_{x\to-\pm 1} y'(x) = \lim_{h\to\pm 2} \xi(h) = -\infty\ .$$

La figura 2, muestra la función $x \mapsto y(x)$ obtenida númericamente por el método de Newton iterando

$$y_{n+1} = y_n - \frac{G(y_n)-H(x)}{G'(y_n)}\ ,\ n=0,1,2,\cdots\ ,$$

a partir de $y_0=1$ con unas pocas (<5) iteraciones; aunque para x cerca de ± 1 (donde la derivada es infinita) se uso un valor inicial más próximo a 2 respectivamente 0 para $x \approx -1$, respectivamente $x \approx 1$.

[1] G.A.R.

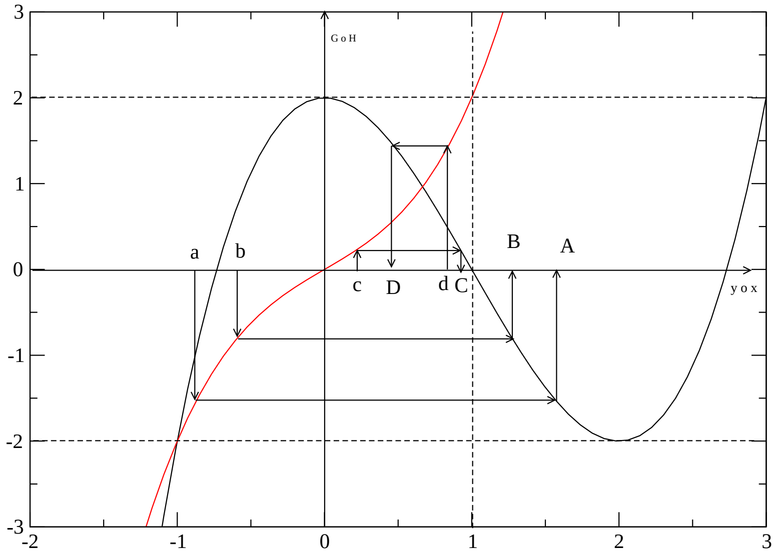

Figure 1: Determinación gráfica de la función $y(x)$: $y(-1) = 2$, $y(a) = A$, $y(b) = B$, $y(0) = 1$, $y(c) = C$, $y(d) = D$, etc. , $y(1) = 0$.

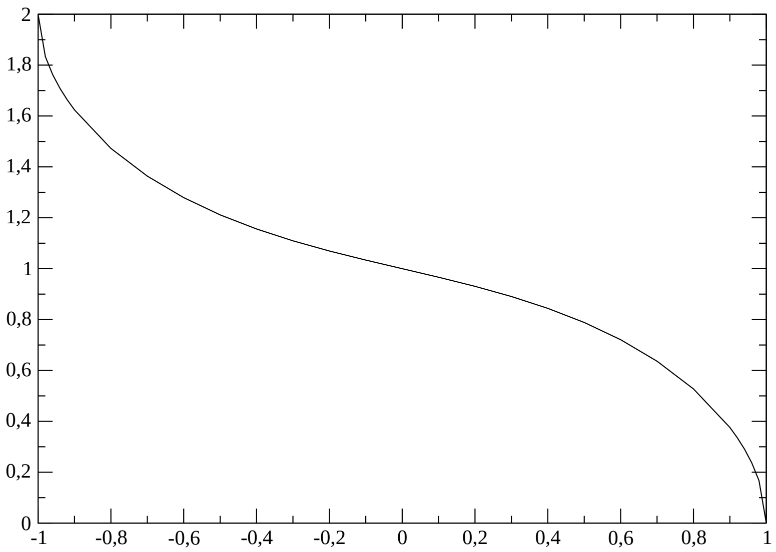

Figure 2: La función $y(x)$ calculada numéricamente por el método de Newton.

El gráfico sugiere que la solución y tiene la simetría $y(-x) - 1 = -(y(x) - 1)$ y, efectivamente, $t \mapsto G(t+1) = t^3 - 3t$ es impar de modo que $y(-x) = -y(x) + 2$.

Discutimos breve- y cualitativamente las solución en su dependencia de $y_o := y(0)$. Ya que $H(0) = 0$ la constante C está determinada por $G(y_o) = 0$ o sea que $C = 3y_o^2 - y_o^3$ (vea la Figura 3).

- Si $y_o < 0$, entonces $C > 0$ y la solución única del problema de Cauchy está definida en $(-\infty, x_o)$ donde $x_o > 0$ queda determinado por $H(x_o) = C$. $y(\cdot)$ es monótona creciente y cóncava con $\lim_{x \to x_o^-} y'(x) = \infty$.
- Si $y_o = 0$ hay dos soluciones distintas para $x < 0$ que convergen a $y_o = 0$ para $x \to 0$ y no hay solución para $x > 0$.
- Si $0 < y_o < 2$, se tiene $0 < C < 4$. La solución es única y está definida en el intervalo finito (a, b) con $a < 0 < b$ donde $H(a) = G(2) = C - 4$ y $H(b) = G(0) = C$. $y(\cdot)$ es monótona decreciente con $\lim_{x \to a^+} y'(x) = \lim_{x \to b^-} y'(x) = -\infty$.
- Si $y_o = 2$ no hay solución para $x < 0$ y hay dos distintas para $x > 0$ ambas tienden a $y_o = 2$ para $x \to 0$.
- Si $y_o > 2$, se tiene $C < 4$ y la solución única del problema de Cauchy está definida en (x_1, ∞) donde $x_1 < 0$ está determinado por $H(x_1) = G(2) = C - 4$. $y(\cdot)$ es monótona creciente y convexa con $\lim_{x \to x_1^+} = \infty$.

Si quiere ver la pinta general de la "multi-función" $x \mapsto y(x)$ rote la figura 3 en el sentido horario por 90^o.

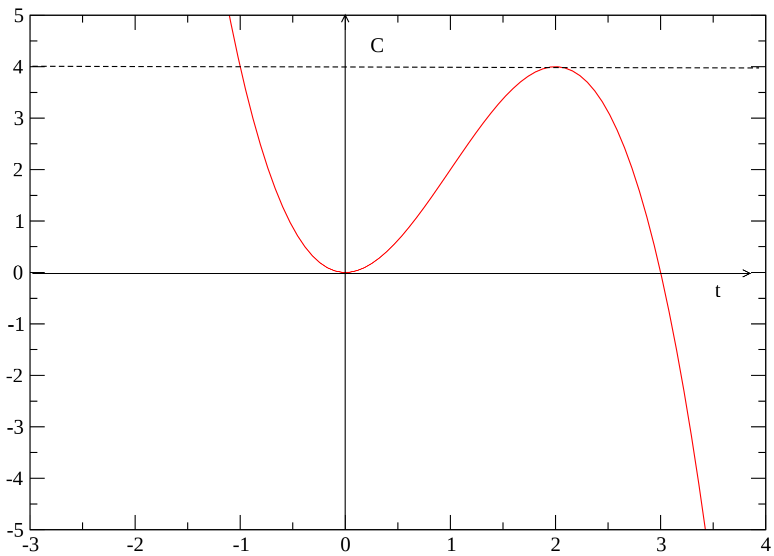

Figure 3: $C = 3t^2 - t^3$ vs t. Determinación de la constante C.