Facultad de Matemática, Astronomía y Física, U.N.C.

Métodos Matemáticos de la Física I

Guía N° 10 (2015)

Problema 1: Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones

a) $y'' + 2y' + 5y = 3\sin(2x)$

b) $y'' + 9y = x^2 e^{3x} + 6$

c) $y'' - 2y' - 3y = -3xe^{-x}$

d) $y'' - y' - 2y = \cosh(2x)$

e) $2y'' + 3y' + y = x^2 + 3\sin(x)$

f) $y'' + \omega_0^2 y = \cos(\omega x),\ \omega^2 \neq \omega_0^2$

Problema 2: Calcular la solución de los siguientes problemas de valores iniciales

a) $y'' - 2y' + y = xe^x + 4, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 1$

b) $y'' + 4y = 3\sin(2x), \quad y(0) = 2,\ y'(0) = -1$

c) $y'' + y' - 2y = 2x, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1$

d) $y'' + 2y' + 5y = 4e^{-x}\cos(2x), \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0$

Problema 3: Utilize variación de parámetros para hallar una solución particular de las siguientes ecuaciones

a) $y'' - 2y' + y = e^x/(1 + x^2)$.

b) $x^2 y'' - 2y = 3x^2 - 1, \quad x > 0, \quad y_1(x) = x^2$.

c) $x^2 y'' - 3xy' + 4y = x^2 \ln(x), \quad x > 0, \quad y_1(x) = x^2$.

d) $x^2 y'' + xy' + (x^2 - 1/4)y = 3x^{3/2}\sin(x), \quad x > 0, \quad y_1(x) = x^{-1/2}\sin(x)$.

Problema 4: Utilize reducción de orden para encontrar una solución linealmente independiente de la dada

a) $x^2 y'' - x(x + 2)y' + (x + 2)y = 0, \quad x > 0,\ y_1(x) = x$.

b) $x^2 y'' + 2xy' - 2y = 0, \quad x > 0,\ y_1(x) = x$.

c) $xy'' - y' + 4x^3 y = 0, \quad x > 0,\ y_1(x) = \sin(x^2)$.

Problema 5: Calcule la solución general de las siguientes ecuaciones

a) $x^2 y'' + 2xy' - 1 = 0, \quad x > 0$.

b) $2x^2 y'' + (y')^3 = 2xy', \quad x > 0$.

c) $x^2 y'' = (y')^2, \quad x > 0$.

d) $yy'' + (y')^2 = 0$.

e) $2y^2 y'' + 2y(y')^2 = 1$.

f) $y'' + (y')^2 = 2e^{-y}$.

Problema 6: Calcular la solución de los siguientes problemas de valores iniciales

a) $y'y'' = 2, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 2$

b) $y'' - 3y^2 = 0, \quad y(0) = 2,\ y'(0) = 4$

c) $(1 + x^2)y'' + 2xy' = 3x^{-2}, \quad y(1) = 2,\ y'(1) = -1$

d) $y'y'' - x = 0, \quad y(1) = 2,\ y'(1) = 1$.

Problema 7: Considere la ecuación diferencial

$$y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = 0$$

en el intervalo $a \le x \le b$. Suponga que se conocen dos soluciones, $y_1(x)$ y $y_2(x)$, tales que

$$\begin{array}{ll} y_1(a) = 0 & y_2(a) \neq 0 \\ y_1(b) \neq 0 & y_2(b) = 0 \end{array}$$

Dé la solución de la ecuación:

$$y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = f(x)$$

que obedece las condiciones $y(a) = y(b) = 0$, en la forma:

$$y(x) = \int_a^b G(x,x')\, f(x')\, dx' \ ,$$

donde $G(x,x')$, la llamada función de Green, se construye sólo en términos de las soluciones y_1 y y_2 y asume diferentes formas funcionales para $x' < x$ y $x' > x$.

Ilustre este problema resolviendo:

$$y'' + k^2\, y = f(x); \quad y(a) = y(b) = 0$$

Problema 8: Considere la ecuación de Hermite

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0, \quad -\infty \le x < \infty, \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{1}$$

Muestre que el factor integrante $p(x) = e^{-x^2}$ lleva esta ecuación a la forma de Sturm-Liouville.

Problema 9: Resuelva el siguiente problema de valores de frontera como un problema de Sturm-Liouville inhomogéneo:

$$y'' + 2y + x = 0, \quad 0 \le x \le 1, \qquad y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

Problema 10: Considere el problema inhomogéneo

$$\begin{gathered} xy'' + y' + xy = f(x), \qquad 0 \le x \le 2, \\ y'(0) = 0, \quad y(2) = 0. \end{gathered}$$

a) Halle los autovalores y autofunciones (normalizadas) del problema de Sturm-Liouville homogéneo asociado

$$\begin{gathered} xy'' + y' + \lambda xy = 0, \qquad 0 \le x \le 2, \\ y'(0) = 0, \quad y(2) = 0. \end{gathered}$$

b) Exprese la solución del problema inhomogéneo como expansión en autofunciones del problema homogéneo, explicitando las expresiones integrales que definen los coeficientes de la expansión.