Facultad de Matemática, Astronomía y Física, U.N.C.

Métodos Matemáticos de la Física I

Guía N° 11 (2015)

Problema 1: Hallar dos soluciones linealmente independientes, como series de potencias de x para las ecuaciones

a) $y'' - x^2 y = 0$

b) $y'' + y = 0$

c) $y'' + 3x^2 y' - xy = 0$

d) $y'' + x^3 y' + x^2 y = 0$

¿Para qué valores de x converge cada soución?

Problema 2: Calcule la solución de $(1 + x^2)y'' + y = 0$ como serie de potencias de x que satisface $y(0) = 0$, y $y'(0) = 1$.

Problema 3: La ecuación de *Chebyshev* es

$$(1 - x^2)y'' - xy' + \alpha^2 y = 0, \quad \alpha \text{ constante.}$$

a) Calcule dos soluciones en serie linealmente independientes válidas para $|x| < 1$.

b) Muestre que para todo entero no negativo $\alpha = n$ hay una solución polinómica de grado n. Normalizados apropiadamente, estas soluciones se conocen como "polinomios de Chebyshev."

Problema 4: Encuentre todas las soluciones de las siguientes ecuaciones

a) $x^2 y'' + 2xy' - 6y = 0$

b) $x^3 y''' + 2x^2 y'' - xy' + y = 0$

c) $2x^2 y'' + xy' - y = 0$

d) $x^2 y'' - 5xy' + 9y = x^3$

Problema 5: Muestre que $x = 1$ y $x = -1$ son puntos singulares regulares para la ecuación de Legendre

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0.$$

Encuentre el polinomio indicial y sus raíces para el punto $x = 1$.

Problema 6: Considere la ecuación

$$x^2 y'' + xe^x y' + y = 0.$$

a) Calcule el polinomio indicial y sus raíces.

b) Calcule los coeficientes $c_1,\ c_2,\ c_3$ de la solución

$$\phi(x) = |x|^i \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \quad (c_0 = 1).$$

Problema 7: Obtenga dos soluciones linealmente independientes de las siguientes ecuaciones válidas alrededor de $x = 0$.

a) $x^2 y'' + 3xy' + (1 + x)y = 0$

b) $x^2 y'' + 5xy' + (3 - x^3)y = 0$

c) $x^2 y'' + 2x^2 y' - 2y = 0$

d) $x^2 y'' - 2x^2 y' + (4x - 2)y = 0$

Problema 8: Considere la ecuación de Bessel de orden cero

$$x^2y'' + xy' + x^2y = 0.$$

sabiendo que

$$J_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m},$$

es una solución, calcule la solución linealmente independiente $K_0(x)$ *(función de Bessel de segunda clase de orden cero).*

Problema 9: Muestre que $J_0'(x)$ satisface la ecuación de Bessel de orden 1

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0.$$

Problema 10: La *función Gamma* de variable compleja se define como

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-x}x^{z-1}dx, \quad \mathrm{Re}(z) > 0.$$

Pruebe que $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ y que $\Gamma(n+1) = n!$ si n es natural.

Muestre que la solución regular en el origen (solución de primera clase) de la ecuación de Bessel

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \alpha^2)y = 0$$

es proporcional a

$$J_\alpha(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{\alpha} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m+\alpha+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m}$$

Problema 11: Considere la ecuación de Hermite

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0, \quad -\infty \leq x < \infty, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1}$$

a) Muestre que el factor integrante $p(x) = e^{-x^2}$ lleva esta ecuación a la forma de Sturm-Liouville.

b) Plantee una solución en serie de potencias para (1) y muestre que la solución para $\lambda = 2n$, que satisface las condiciones de contorno correctas, es un polinomio de grado n.

Problema 12: Resuelva el siguiente problema de valores de frontera como un problema de Sturm-Liouville inhomogéneo:

$$y'' + 2y + x = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \qquad y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

Problema 13: Considere el problema inhomogéneo

$$xy'' + y' + xy = f(x), \qquad 0 \leq x \leq 2,$$
$$y'(0) = 0, \quad y(2) = 0.$$

a) Halle los autovalores y autofunciones (normalizadas) del problema de Sturm-Liouville homogéneo asociado

$$xy'' + y' + \lambda xy = 0, \qquad 0 \leq x \leq 2,$$
$$y'(0) = 0, \quad y(2) = 0.$$

b) Exprese la solución del problema inhomogéneo como expansión en autofunciones del problema homogéneo, explicitando las expresiones integrales que definen los coeficientes de la expansión.

Problema 14: Muestre que si los coeficientes a_{12} y a_{21} no son ambos nulos y las funciones g_1 y g_2 son diferenciables entonces el sistema

$$y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2' + g_1 \ , \quad y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + g_2$$

se puede reducir a una única ecuación diferencial (lineal e inhomogenea) de segundo orden.

Problema 15: Determine la solución general de los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales lineales homogeneas de primer orden

a) $x' = x - 2y$, $y' = -3x$;

b) $x' = 2x + y$, $y' = 2y$;

c) $x' = -2x + \frac{1}{4}y$, $y' = -x - y$;

d) $x' = x - y$, $y' = 2x - y$.