Facultad de Matemática, Astronomía y Física, U.N.C.

Métodos Matemáticos de la Física I – 2015

Guía 5, algunas soluciones[1]

1b) Se busca la serie de Taylor de $f(z) := \exp(i\mathrm{Log}(z)) = (i\ln|z| - \mathrm{Arg}(z))$ (o sea la rama principal de z^i) alrededor de $z = 1$.

Observamos que f es analítica en $\mathbb{C}$ sin la semirecta real no positiva donde f esta definida (si convenimos en que $f(0) = 0$) pero no es continua. Usando que $\exp' = \exp$ y que $\mathrm{Log}'(z) = 1/z$, obtenemos succesivamente

$$f'(z) = if(z)/z = i\exp((i-1)\mathrm{Log}(z)) ,$$

$$f''(z) = (i-1)f'(z)/z = i(i-1)\exp((i-2)\mathrm{Log}(z))$$

de donde adivinamos que

$$f^{(k)}(z) = i(i-1)(i-2)\cdots(i-k+1)\exp((i-k)\mathrm{Log}(z) , \quad k \geq 1 ,$$

lo que se puede demostrar por inducción. Ya que $\mathrm{Log}(1) = 0$ y $\exp(0) = 1$ obtenemos

$$f^{(k)}(1) = i(i-1)(i-2)\cdots(i-k+1) , \quad k \geq 1 ,$$

de modo que la serie de Taylor alrededor de $z = 1$ es

$$f(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{i(i-1)\cdots(i-k)}{k!}(z-1)^k$$

se espera que esta sea convergente en el dominio de analiticidad de Arg.

2a) Se buscan las singularidades de $f(z) = \sin(z)/(z^2(z-\pi))$ y los desarrollos de Laurent de esta función alrededor de estas.

Los ceros del denominador son 0 y π. Los ceros del numerador son $n\pi$ con $n \in \mathbb{Z}$; todos simples ya que $\sin'(n\pi) = \cos(n\pi) = (-1)^n$. En un entorno de cada cero $n\pi$ tenemos

$$\sin(z) = (z - n\pi)g(z)$$

donde g es analítica en el entorno y no se anula en él; además $g(n\pi) = \cos(n\pi) = (-1)^n$. Entonces, en un entorno de $z = 0$ tenemos

$$f(z) = \frac{zg(z)}{z^2(z-\pi)} = \frac{g(z)}{z(z-\pi)} ;$$

por lo tanto $z = 0$ es un polo simple. También, en un entorno de $z = \pi$ tenemos

$$f(z) = \frac{(z-\pi)g(z)}{z^2(z-\pi)} = \frac{g(z)}{z^2}$$

por ende $z = \pi$ es singularidad removible y podríamos definir $f(\pi) = g(\pi)/\pi^2 = -1/\pi^2$.

Pasamos a los desarrollos de Laurent. En $z = \pi$ tenemos

$$\sin(z) = -\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(z-\pi)^{2n+1}$$

[1] G.A.R.

convergente en todo el plano complejo. Por otro lado, con la fórmula de adición de la serie geométrica

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+(z-\pi)/\pi} = \pi^{-1}\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{(z-\pi)^n}{\pi^n}$$

convergente en el disco abierto de radio π alrededor de π ($|(z-\pi)/\pi| < 1$). Entonces, multiplicando las series

$$f(z) = -\frac{1}{\pi^2}\sum_{n,k,m\in\mathbb{N}}\frac{(-1)^{n+k+m}}{(2n+1)!}\,\frac{(z-\pi)^{2n+k+m}}{\pi^{k+m}}$$

convergente en disco abierto de radio π alrededor de π. En este caso la serie de Laurent es la serie de Taylor pues la singularidad en $z=\pi$ es removible.
En $z=0$, se tiene

$$\sin(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1}$$

convergente en todo el plano complejo; y

$$1/(z-\pi) = \frac{-1}{\pi(1-(z/\pi))} = \frac{-1}{\pi}\sum_{n\in\mathbb{N}}(z/\pi)^n$$

convergente en el disco abierto de radio π alrededor de 0 ($|z/\pi| < 1$). Por lo tanto

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{1}{\pi}\sum_{n,k\in\mathbb{N}}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\,\frac{z^{2n+k-1}}{\pi^k} \qquad (1)\\ &= -\frac{1}{\pi z}-\frac{1}{\pi^2}-\left(\frac{1}{\pi^3}-\frac{1}{6\pi}\right)z+\mathcal{O}(z^2) \end{aligned}$$

seguramente convergente en el disco abierto de radio π alrededor de 0. Esta serie de tipo Laurent tiene un sumando z^{-1} concomitante con el polo simple en 0; pero su radio de convergencia exterior es aparentemente π aunque debería ser ∞ ya que f no tiene realmente ninguna otra singularidad fuera del polo en $z=0$. ¿Es esta realmente la serie de Laurent alrededor de 0? ¿Cual será el radio de convergencia exterior de esta serie? ¡Empecemos de nuevo! Sabemos que la función

$$g(z) := \frac{\sin(z)}{z-\pi}\ ,\quad z\neq\pi\ ,$$

es la restricción de una función entera (también la llamo g) al plano pinchado en π. Entonces su serie de Taylor alrededor de 0 (observe que $g(0)=0$)

$$g(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{g^{(n)}(0)}{n!}z^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{g^{(n)}(0)}{n!}z^n$$

es convergente en todo $\mathbb{C}$. ¡Ahora si! La serie de Laurent de f alrededor de 0 es

$$f(z) = \sum_{n=-1}^{\infty}\frac{g^{(n+2)}(0)}{(n+2)!}z^n = g'(0)z^{-1}+\frac{g''(0)}{2}+\frac{g'''(0)}{6}z+\mathcal{O}(z^2) \qquad (2)$$

convergente en $\mathbb{C}$ sin $z=0$. Calculemos sus derivadas en 0:

$$g'(0) = \left.\frac{\cos(z)(z-\pi)-\sin(z)}{(z-\pi)^2}\right|_{z=0} = -1/\pi\,,$$

$$g''(0) = \left.\frac{\sin(z)(z-\pi)^2 - 2\cos(z)(z-\pi) + 2\sin(z)}{(z-\pi)^3}\right|_{z=0} = -2/\pi^2\,,$$

$$g'''(0) = \left.\frac{-\cos(z)(z-\pi)^3 + 3\sin(z)(z-\pi)^2 + 6\cos(z)(z-\pi) - 6\sin(z)}{(z-\pi)^4}\right|_{z=0}$$

$$= \frac{1}{\pi}(1 - 6/\pi^2)\,, etc...$$

De modo que hasta orden z las series (1) y (2) coinciden. Se puede ver que realmente son idénticas de modo que el radio de convergencia exterior de (1) es ∞.

3 Se piden las series de Laurent de $\csc = 1/\sin$ alrededor de $z = 0$ que a) converge alrededor de $z = 0$ y b) que converge en $z = \pi + i$.

La primera observación pertinente es que la cosecante es una función impar lo que persiste en su versión compleja ya que $\sin(-z) = (2i)^{-1}(\exp(-iz) - \exp(iz)) = -\sin(z)$. Pero si f es par (impar) y su serie de Laurent en el anillo abierto A_{0,ρ_1,ρ_2} es

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n\ ,$$

entonces la transfornación $z \mapsto -z$ deja a este anillo invariante y se tiene

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n = f(z) = \pm f(-z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(-1)^n z^n\ ;$$

pero la expansión de Laurent es única de modo que $a_n = \pm(-1)^n a_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. En el caso par $(+)$, los coeficientes de índices impares deben anularse mientras que en caso impar $(-)$ son los coeficientes de índices pares los que son nulos.

Los ceros del seno están determinadios por $\exp(iz) = \exp(-iz)$ o sea $\exp(2iz) = 1$ que es equivalente a $z = n\pi$ para algún $n \in \mathbb{Z}$. Estos ceros son simples ya que $\sin'(n\pi) = \cos(n\pi) = (-1)^n$ de modo que $(-1)^n(z - n\pi)$ es el primer término de la serie de Taylor del seno alrededor de $n\pi$. Pero entonces $n\pi$ es un polo de orden 1 de csc. La serie de Laurent de csc alrededor del cero 0 es convergente en el anillo abierto $A_{0,0,\pi} := \{z : 0 < |z| < \pi\}$ y es la solución de la parte a). El número $\pi + i$ cae fuera de este anillo ya que $|\pi + i| = \sqrt{\pi^2 + 1} > \pi$. Pero la serie de Laurent asociada con el anillo abierto $A_{0,\pi,2\pi} := \{z : \pi < |z| < 2\pi\}$ converge en $\pi + i$ ya que $\sqrt{\pi^2 + 1} < 2\pi$, lo que responde b). Calculamos las series respectivas.

Sabemos que la serie de Laurent en $A_{0,0,\pi}$ es de la forma

$$z^{-1} + \sum_{n\in\mathbb{N}} a_{2n+1} z^{2n+1}$$

ya que $z = 0$ es un polo simple con residuo $\lim \frac{z}{\sin(z)} = 1$ por lo dicho sobre la serie de Taylor del seno alrededor de un cero del seno. Entonces, la serie de potencias no-negativas es la serie de Taylor alrededor de $z = 0$ de la función

$$h(z) = \csc(z) - 1/z = \frac{z - \sin(z)}{z\sin(z)}$$

que es analítica (e impar) en el disco abierto de radio π alrededor de $z = 0$ con

$$h(0) = \lim_{z\to 0} \frac{z - \sin(z)}{z\sin(z)} = \lim_{z\to 0} \frac{1 - \cos(z)}{\sin(z) + z\cos(z)} = \lim_{z\to 0} \frac{\sin(z)}{2\cos(z) - z\sin(z)} = 0\,.$$

Describimos a continuación tres métodos directos para calcular los coeficientes a_n:

1. Vía h. Abreviamos $s := \sin(z)$, $c := \cos(z)$. Solamente necesitamos las derivadas impares de h evaluadas en $z = 0$.
$$h'(z) = \frac{s^2 - cz^2}{s^2 z^2} \ ,$$
Aplicando la regla de L'Hôpital cuatro veces se obtiene que $h'(0) = 1/6$.
$$h'''(z) = \frac{6s^4 - 5s^2cz^4 - 6c^3z^4}{s^4z^4}$$
de donde ocho aplicaciones sucesivas de la regla de L'Hôpital da $h'''(0) = 7/60$. En este caso el método es muy engorroso.
2. De acuerdo a la expresión general
$$a_n = (2\pi i)^{-1} \int_C \frac{1}{z^{n+1}\sin(z)}\, dz \ .$$
La función $p_n(z) := 1/(z^{n+1}\sin(z))$ tiene un polo de orden $n+2$ en $z = 0$ de modo que
$$a_n = Res(p_n, 0) = \frac{1}{(n+1)!} \lim_{z\to 0} \frac{d^{n+1}}{dz^{n+1}} z^{n+2} p_n(z) = \frac{1}{(n+1)!} \lim_{z\to 0} \frac{d^{n+1}}{dz^{n+1}} \frac{z}{\sin(z)} \ .$$
Calculamos las derivadas de $g(z) := z/\sin(z)$ y luego su valor en $z = 0$ por aplicación sucesiva de la regla de L'Hôpital; solamente necesitamos las derivadas pares.
$$g''(z) = \frac{-2cs + s^2z + 2c^2z}{s^3} \ ,$$
y después de 3 aplicaciones de la regal de L'Hôpital obtenemos $g''(0) = 1/3$ de modo que $a_1 = 1/6$. Etc. El método es tan engorroso como el primero.
3. Como conocemos explicitamente la serie del seno, la invertimos:
$$1 = \csc(z)\sin(z) = \left(z^{-1} + \sum_{n\in\mathbb{N}} a_{2n+1} z^{2n+1} \right) \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \right) \ ;$$
o sea
$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n} + \sum_{n,k\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} a_{2n+1} z^{2k+2n+2} = 1 \ .$$
Escribimos los primeros términos de la primera serie:
$$1 - (3!)^{-1}z^2 + (5!)^{-1}z^4 - (7!)^{-1}z^6 + \cdots$$
y los de la segunda serie sucesivamente
$$\begin{array}{llll} a_1z^2 & +a_3z^4 & +a_5z^6 & +\cdots \\ & -(3!)^{-1}a_1z^4 & -(3!)^{-1}a_3z^6 & +\cdots \\ & & (5!)^{-1}a_1z^6 & +\cdots \end{array}$$
Entonces $a_1 = 1/3!$, $a_3 = -(1/5!) + a_1/3! = (1/3!)^2 - (1/5!) = 7/360$, $a_5 = (1/7!) - (a_1/5!) + (a_3/3!) = 31/15120$, $\cdots$. La fórmula recursiva cerrada para los coeficientes de índice impar es:
$$a_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{(2k+3)!} + \frac{a_{2k-1}}{3!} - \frac{a_{2k-3}}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^{k+1}a_1}{(2k+1)!} \ , \quad k \in \mathbb{N} \ .$$
Esto es alimento para programar un algoritmo que calcule automaticamente los coeficientes.

De modo que:

$$\boxed{\csc(z) = z^{-1} + \tfrac{z}{6} + \tfrac{7z^3}{360} + \tfrac{31z^5}{15120} \ + \cdots} \ .$$

Pasamos al anillo $A_{0,\pi,2\pi}$ (que contiene al punto $\pi + i$). Tendremos

$$\csc(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_{2n+1} z^{2n+1} \ ,$$

con

$$b_n = (2\pi i)^{-1} \int_C \frac{1}{z^{n+1}\sin(z)}\, dz$$

donde C es el círculo de radio 4 (por ejemplo; basta que este entre π y 2π). Ahora bien, la función $p_n(z) = 1/z^{n+1}\sin(z)$ (introducida en el b) de la discusión anterior) tiene polos simples en $\pm\pi$ para cualquier $n \in \mathbb{Z}$ mientras que en $z = 0$, para $n \leq -1$,

$$p_n(z) = z^{|n|-1}/\sin(z)$$

de modo que $z = 0$ es un polo simple cuando $n = -1$ y una singularidad removible si $n \leq -2$. Los residuos en $z = 0$ son:

$$Res(p_n, 0) = \begin{cases} a_n & , \quad \text{si } n \geq -1 \\ 0 & , \quad \text{si } n \leq -2 \end{cases} \ .$$

Mientras que los residuos en $\pm\pi$ son

$$Res(p_n, \pm\pi) = \lim_{z\to\pm\pi} \frac{(z \mp \pi)}{z^{n+1}\sin(z)} = \frac{1}{(\pm\pi)^{n+1}\cos(\pm\pi)} = -(\pm\pi)^{-n-1} \ .$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} b_n &= Res(p_n, 0) + Res(p_n, \pi) + Res(p_n, -\pi) \\ &= a_n - (\pi)^{-n-1} - (-\pi)^{-n-1} = a_n - (\pi)^{-n-1}[1 - (-1)^n] \ ; \end{aligned}$$

recuperando lo que ya sabemos, que $b_n = 0$ para n par, y

$$b_{2n+1} = a_{2n+1} - 2(\pi)^{-2(n+1)} \ , \ \ n \in \mathbb{Z} \ .$$

Por lo tanto

$$\boxed{\csc(z) = \tfrac{-2}{\pi} \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} (\pi/z)^{2n+1} - \tfrac{1}{z} + \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(a_{2n+1} - \tfrac{2}{\pi^{2n+2}}\right) z^{2n+1}} \ .$$

5b) Se pide la integral sobre el círculo de radio 1 centrado en 0 orientado positivamente de la función $\exp(1/z)/z$.

Llamamos f a la función dada que tiene una singularidad en $z = 0$. Ya que

$$f(z) = z^{-1} \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!z^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!z^n}$$

es convergente si $z \neq 0$, esta es la serie de Laurent de f alrededor de $z = 0$ que es entonces una singularidad esencial con residuo 1. Por el Teorema de los Residuos, si C es el círculo en cuestión, entonces

$$\int_C f(z)\, dz = 2\pi i \ .$$