Facultad de Matemática, Astronomía y Física, U.N.C.

Métodos Matemáticos de la Física I

Primer parcial (22/09/2015): soluciones[1]

Problema 1: Considere la función $z \mapsto |z|^2$ en el plano complejo y muestre que no es analítica en ningún punto que no sea $z = 0$.

Solución:

$$\frac{|z+h|^2 - |z|^2}{h} = \overline{z} + \overline{h} + z\frac{\overline{h}}{h} \ ,$$

y el sumando $z\overline{h}/h$ es igual a z cuando h es real y a $-z$ cuando h es imaginario puro de modo que no tiene límite cuando $h \to 0$ si $z \neq 0$.

Variante: La función toma valores reales de modo que su parte imaginaria v se anula. ¡Las ec. de Cauchy-Riemann no se cumplen!

Problema 2: Muestre que si la función $f = u + iv$ es analítica en $z_o = x_o + iy_o$ entonces el Jacobiano

$$J(x_o, y_o) = det \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x_o, y_o) & , & \frac{\partial u}{\partial y}(x_o, y_o) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x_o, y_o) & , & \frac{\partial v}{\partial y}(x_o, y_o) \end{pmatrix}$$

es igual a $|f'(z_o)|^2$.

Solución: Se tiene por ejemplo, $f'(z_o) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_o, y_o) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_o, y_o)$; y con las ec. de Cauchy-Riemann

$$J(x_o, y_o) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_o, y_o)\frac{\partial v}{\partial y}(x_o, y_o) - \frac{\partial u}{\partial y}(x_o, y_o)\frac{\partial v}{\partial x}(x_o, y_o)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_o, y_o)\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}(x_o, y_o)\right)^2 = |f'(z_o)|^2 \ .$$

Problema 3: Determine el conjunto $\arg(e^i)$ y todos los valores del número $|e^i|$ donde $e = \exp(1)$.

Solución: Ya que $\arg(e) = \{2n\pi : \ n \in \mathbb{Z}\}$,

$$e^i = \exp(i \log(e)) = \exp(i(\ln(e) + i2n\pi)) = \exp(-2n\pi + i) = e^{-2n\pi} \exp(i) \ .$$

Luego $\arg(e^i) = \{1 + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ y $|e^i| = e^{-2n\pi}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Problema 4: Demuestre que si la función v es armónica conjugada a la función u en un dominio entonces uv es armónica en ese dominio.

Solución: $u + iv$ es analítica por lo cual $(u + iv)^2$ es analítica y como $uv = \frac{1}{2}Im((u + iv)^2)$, uv es armónica.

Variante: Con una notación evidente (que se usará mucho en Métodos II):

$$\Delta uv = u_{xx}v + 2u_xv_x + uv_{xx} + u_{yy}v + 2u_yv_y + uv_{yy} \ .$$

[1] G.A.R.

Con las ec. de Cauchy-Riemann, $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$, y entonces

$$u_{xx} = (u_x)_x = (v_y)_x = v_{xy} \ , \quad v_{xx} = (v_x)_x = -(u_y)_x = -u_{xy} \ ,$$

$$u_{yy} = (u_y)_y = -(v_x)_y = -v_{xy} \ , \quad v_{yy} = (v_y)_y = (u_x)_y = u_{xy} \ ,$$

de modo que

$$\Delta uv = v_{xy}v + 2v_y v_x - uu_{xy} - v_{xy}v - 2v_x v_y + uu_{xy} = 0 \ .$$

Problema 5: Determine los dos posibles desarrollos de Laurent

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n (z-1)^n$$

de la función $f(z) = z/[(z-1)(z-2)]$ que están centrados en $z_o = 1$. Calcule los coeficientes a_0, a_1 y a_{-1} para cada uno de estos dos desarrollos.

Solución: Ya que 1 y 2 son polos simples de f, los desarrollos de Laurent alrededor de 1 son dos:

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n (z-1)^n \ , \text{ en } \{z : \ 0 < |z-1| < 1\} \ ;$$

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n (z-1)^n \ , \text{ en } \{z : \ |z-1| > 1\} \ .$$

Para el primero tenemos

$$f(z) = [(z-1)+1]\frac{1}{z-1} \ \frac{-1}{1-(z-1)} = \left[1 + \frac{1}{z-1}\right] \ \frac{-1}{1-(z-1)} \ ,$$

y por la fórmula de sumación de una serie geométrica

$$\frac{1}{1-(z-1)} = \sum_{n\in\mathbb{N}} (z-1)^n \ ,$$

convergente para $|z-1| < 1$. Entonces, para $0 < |z-1| < 1$

$$f(z) = -\sum_{n\in\mathbb{N}} (z-1)^n - \sum_{n\in\mathbb{N}} (z-1)^{n-1} = -\frac{1}{z-1} - 2\sum_{n\in\mathbb{N}} (z-1)^n$$

de modo que en este caso $a_{-1} = -1$, $a_o = -2$ y $a_1 = -2$.
Para el segundo caso

$$f(z) = [(z-1)+1]\frac{1}{z-1} \ \frac{1}{(z-1)\left(1 - \frac{1}{z-1}\right)} = \left[\frac{1}{z-1} + \frac{1}{(z-1)^2}\right] \ \frac{1}{1 - \frac{1}{z-1}}$$

y con la serie geométrica

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{z-1}} = \sum_{n\in\mathbb{N}} (z-1)^{-n}$$

convergente para $|z-1| > 1$, obtenemos

$$f(z) = \frac{1}{z-1} + 2\sum_{n\geq 2} (z-1)^{-n} \ ,$$

con $a_o = a_1 = 0$ y $a_{-1} = 1$.

Problema 6: Determine las singularidades de $f(z) = z^2/\sin(z)$, su tipo y el residuo correspondiente.

Solución: Recordamos que tanto sin como cos son enteras con $\sin'(z) = \cos(z)$ y $\cos'(z) = -\sin(z)$. Por la regla de L'Hôpital

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} 2z/\cos(z) = 0$$

de modo que 0 es una singularidad removible y podríamos definir $f(0) = 0$.
Los ceros de $\sin(z)$ son[2] los números $z_n = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, y son todos simples[3] pues $\sin'(z_n) = \cos(z_n) = (-1)^n$. Luego las singularidades no removibles de f son los números z_n con $n \neq 0$ y son polos simples. Con la fórmula general para el residuo

$$Res(f, z_n) = \lim_{z\to z_n} \frac{(z-z_n)z^2}{\sin(z)} = \lim_{z\to z_n} \frac{z^2}{\frac{\sin(z)-\sin(z_n)}{z-z_n}} = \frac{z_n^2}{\cos(z_n)} = (-1)^n n^2\pi^2 \ ,$$

con $n = \pm 1, \pm 2, \cdots$.

Problema 7: Calcule

$$\int_\Gamma \frac{1}{\cos(z)}\, dz$$

en los siguientes cuatro casos:

a) Γ es la circunferencia de radio 1 centrada en $\pi/2$.

b) Γ es la circunferencia de radio 1 centrada en $-\pi/2$.

c) Γ es la circunferencia de radio 2 centrada en 0.

d) Γ es el camino cerrado (ver figura en la página siguiente) que se obtiene concatenando el camino elipsoidal (¡orientado negativamente!) con el camino triangular (orientado positivamente) en el punto de contacto de estos caminos:

Solución: Todo sucede dentro de $D := \overline{D(0,4)}$ –el disco cerrado de radio 4 alrededor de 0. Con $p := \pi/2$, los ceros[4] de $\cos(z)$ en D son $\pm p$. Las series de Taylor del cos alrededor de estos dos ceros son uniformemente convergentes en D con

$$\begin{aligned}\cos(z) &= -\sin(\pm p)(z \mp p) + \frac{1}{3!}\sin(\pm p)(z\mp p)^3 + \cdots \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} (-)^n \frac{\sin(\pm p)}{(2n+1)!}(z\mp p)^{(2n+1)} = (z\mp p)g_\pm(z)\end{aligned}$$

donde la funciones $g_\pm$ son analíticas en D con $g(\pm p) = -\sin(\pm\pi/2) = \mp 1$ y, como estos ceros son simples, las funciones $g_\pm$ tienen solamente un cero en D dado por $\mp p$.

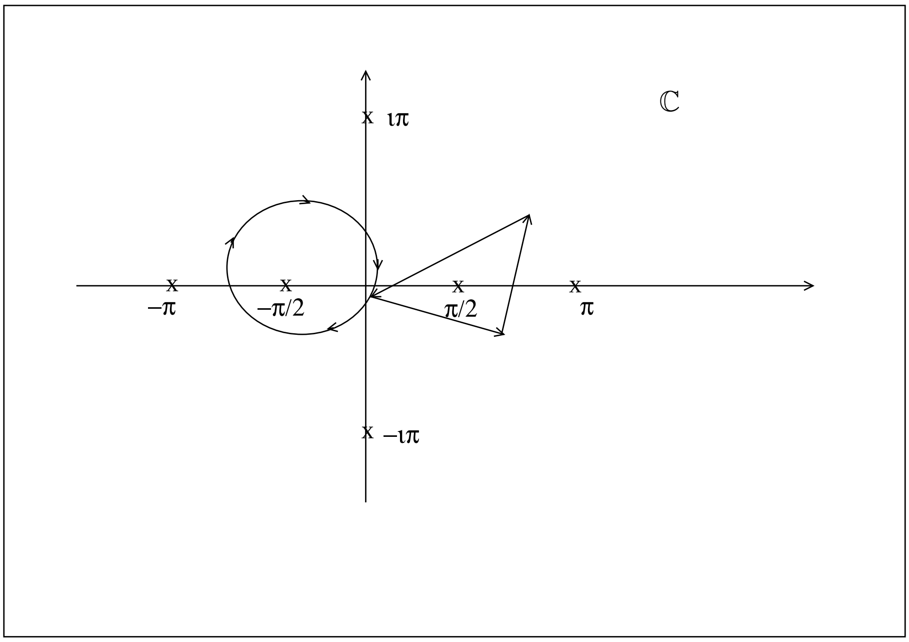
[2] $\sin(z) = 0$ si y sólo si $\exp(2iz) = 1$.

[3] La serie de Taylor del sin alrededor de z_n es (convergente en todo $\mathbb{C}$)

$$\sin(z) = (-1)^n(z-z_n) - (1/3!)(-1)^n(z-z_n)^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\cos(z_n)}{(2k+1)!}(z-z_n)^{(2k+1)}$$

$$= (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(z-z_n)^{2k+1} = (-1)^n(z-z_n)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(z-z_n)^{2k} \ .$$

[4] $\cos(z) = 0$ si y sólo si $\exp(2iz) = -1$.



a) Si $C_1(p)$ denota la circunferencia con centro p de radio 1 recorrida anti-horariamente entonces en el disco abierto $D(p, 1, 003)$ podemos escribir

$$\frac{1}{\cos(z)} = \frac{1}{(z-p)g_+(z)}$$

y la función $z \mapsto 1/g_+(z)$ es analítica en $D(p, 1, 003)$ (ya que el cero de g_+ que es $-p$ está a una distancia $2p = \pi$ de p). Por lo tanto con la fórmula de Cauchy (ya que $\overline{D(p,1)} \subset D(p, 1, 003)$)

$$\int_{C_1(p)} \frac{1}{\cos(z)}\, dz = \int_{C_1(p)} \frac{1}{(z-p)g_+(z)}\, dz = 2\pi i \frac{1}{g_+(p)} = -2\pi i \; .$$

También se puede aplicar el Teorema de los residuos; se tiene:

$$Res(1/\cos, \pm p) = \lim_{z \to \pm p} \frac{(z \mp p)}{\cos(z)} = \lim_{z \to \pm p} \frac{1}{g_\pm(\pm p)} = \mp 1 \; .$$

b) Podemos repetir lo hecho en el punto anterior para obtener

$$\int_{C_1(-p)} \frac{1}{\cos(z)}\, dz = \int_{C_1(-p)} \frac{1}{(z+p)g_-(z)}\, dz = 2\pi i \frac{1}{g_-(-p)} = 2\pi i \; .$$

Otra variante –elegante e instructiva– es considerar la transformación $\alpha(z) := -\overline{z}$ de $\mathbb{C}$ que es biyectiva. Entonces es inmediato verificar que α transforma a $C_1(p)$ en $-C_1(-p)$ y a $C_1(-p)$ en $-C_1(p)$ (hay un cambio de orientación). Pero entonces, con la transformación $z = \alpha(w)$ tenemos $dz = -d\overline{w}$ y con las propiedades $\cos(-z) = \cos(z)$ y $\cos(\overline{z}) = \overline{\cos(z)}$

$$\int_{C_1(p)} \frac{1}{\cos(z)}\, dz = -\int_{-C_1(-p)} \frac{1}{\cos(-\overline{w})} d\overline{w} = \overline{\left(\int_{C_1(-p)} \frac{1}{\cos(w)} dw \right)} \; .$$

Pero entonces, del caso anterior,

$$\int_{C_1(-p)} \frac{1}{\cos(w)} dw = -\int_{C_1(p)} \frac{1}{\cos(w)} dw = 2\pi i \; .$$

c) Partimos la circunferencia $C_2(0)$ orientada positivamente por la mitad con el segmento de recta s que une $2i$ con $-2i$, i.e., $s := \{2i(1-2t) :) \le t \le 1\}$. Conservando la orientación original, consideramos las dos semicircunferencias: $C_2(0)^+ := C_2(0) \cap \{z : Re(z) \ge 0\}$ con punto inicial $-2i$ y punto final $2i$ y $C_2(0)^- := C_2(0) \cap \{z : Re(z) \le 0\}$ con punto inicial $2i$ y punto final $-2i$. Entonces los caminos

$$\Gamma^{\pm} = C_2(0)^+ + s \ , \ \ \Gamma^- = C_2(0)^- - s$$

son cerrados y se tiene

$$\int_{\Gamma^+ + \Gamma^-} \frac{1}{\cos(z)}\, dz = \int_{C_2(0)} \frac{1}{\cos(z)}\, dz \ .$$

Pero

$$\int_{\Gamma^{\pm}} \frac{1}{\cos(z)}\, dz = \int_{C_1(\pm p)} \frac{1}{\cos(z)}\, dz \ ;$$

luego

$$\int_{C_2(0)} \frac{1}{\cos(z)}\, dz = 0 \ .$$

d) El lazo Γ es deformable al camino-lazo formado por dos circunferencias centradas en $\pm p$ que se tocan en 0 (ambas de radio p). Por lo tanto

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{\cos(z)}\, dz = \int_{C_1(p)} \frac{1}{\cos(z)}\, dz - \int_{C_1(-p)} \frac{1}{\cos(z)}\, dz = -4\pi i \ .$$

Se obtiene el mismo resultado aplicando el Teorema de los Residuos.