Facultad de Matemática, Astronomía y Física, U.N.C.

Métodos Matemáticos de la Física I

Parcial 2 — 15/10/2015 — Soluciones[1]

Problema 1: Considere la función

$$f(x) = x(\pi - x)(\pi + x), \quad -\pi < x \leq \pi, \quad f(x + 2\pi) = f(x).$$

a) Calcule la serie de Fourier en senos y cosenos de la función dada. *Ayuda:* Estudie la paridad de la función antes de hacer las cuentas.

b) Utilice el desarrollo encontrado para calcular el valor de la serie

$$1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \dots$$

Solución: La función $f(x) = \pi^2 x - x^3$ satisface $f(-\pi) = f(\pi) = 0$ y es impar de modo que los coeficientes asociados con los cosenos se anulan y aquellos de los senos son (integración por partes):

$$\begin{aligned}
b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin(nx)\,dx &= 2\pi\int_0^\pi x\sin(nx)\,dx - \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^3\sin(nx)\,dx \\
&= 2\pi\left\{-x\cos(nx)/n|_0^\pi + n^{-1}\int_0^\pi \cos(nx)\,dx\right\} \\
&\quad -\frac{2}{\pi}\left\{-x^3\cos(nx)/n|_0^\pi + 3n^{-1}\int_0^\pi x^2\cos(nx)\,dx\right\} \\
&= 2\pi\left\{-\pi(-1)^n + 0\right\} - \frac{2}{\pi}\left\{-\pi^3(-1)^n + 3n^{-2}x^2\sin(nx)|_0^\pi - 6n^{-2}\int_0^\pi x\sin(nx)\,dx\right\} \\
&= -2\pi^2(-1)^n - \frac{2}{\pi}\left\{-\pi^3(-1)^n + 0 + 6n^{-3}x\cos(nx)|_0^\pi - 6n^{-3}\int_0^\pi \cos(nx)\,dx\right\} \\
&= 2\pi^2(-1)^n - \frac{2}{\pi}\left\{-\pi^3(-1)^n + 6n^{-3}\pi(-1)^n - 0\right\} = -12n^{-3}(-1)^n\ ;
\end{aligned}$$

de modo que

$$-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}\sin(nx)$$

es la serie de Fourier de f buscada. Ya que f es diferenciable con derivada

$$f'(x) = \pi^2 - 3x^2$$

que es continua, la serie de Fourier converge uniformemente a f en $[-\pi, \pi]$. Observando que

$$\sin(2n\pi/2) = 0\ ,\ \ \sin((2n+1)\pi/2) = (-1)^n\ ,\ \ n \in \mathbb{N}\ ,$$

tenemos,

$$f(\pi/2) = -12\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}\sin(n\pi/2) = -12\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{2n+1}}{(2n+1)^3}(-1)^n$$

[1] G.A.R.

$$= 12\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = 12\left(1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \cdots\right)$$

Podemos entonces deducir que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = f(\pi/2)/12 = \pi^3/32\ .$$

Alternativa de cálculo de los coeficientes: Como para cualquier función polinomial de grado p, hay un procedimiento alternativo (puramente “algebraico”) para determinar los coeficientes usando la relación entre los coeficientes de una función y su derivada y el hecho de que $\widehat{f^{(p)}}(n) = 0$ para $n \neq 0$.

En nuestro caso, se cumple $f'(-\pi) = f'(\pi)$ y f' es diferenciable con derivada

$$f''(x) = -6x$$

que no cumple con $f''(-\pi) = f''(\pi)$. Entonces ya que f' y f'' son continuas se tiene[2]

$$\widehat{f''}(n) = (in)^2 \widehat{f}(n)\ ,\quad n \in \mathbb{Z}\ .$$

Pero $f'''(x) = -6$ de modo que $\widehat{f'''}(n) = 0$ para $n \neq 0$ y entonces –por la relación entre los coeficientes de una función y su derivada–

$$0 = \widehat{f'''}(n) = \frac{(-1)^n}{2\pi}(f''(\pi) - f''(-\pi)) + in\widehat{f''}(n) = -6(-1)^n + in\widehat{f''}(n)\ ;$$

luego

$$\widehat{f''}(n) = -i(-1)^n 6/n\ ;,$$

y

$$\widehat{f}(n) = i(-1)^n 6/n^3\ ;$$

por lo tanto

$$b_n = -2Im(\widehat{f}(n)) = -12(-1)^n/n^3\ .$$

Problema 2: Extender la función $f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x \leq 1/2 \\ 0 & \text{si } 1/2 < x \leq 1 \end{cases}$$

en el intervalo con $-1 < x < 1$ y calcule la serie de Fourier de manera de obtener:

a) Una serie de Fourier de funciones senos.

b) Una serie de Fourier de funciones cosenos.

c) Utilizando la identidad de Parseval y alguna de las series obtenidas, calcule el valor de

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)^2}.$$

Solución:

[2] Aplique la relación $\widehat{h}(n) = ((-1)^n/2\pi)(h(\pi) - h(-\pi) + in\widehat{h'}(n)$ sucesivamente.

a) Para obtener una serie en senos es preciso que la función se extienda a una función impar; o sea:

$$g(x) = \begin{cases} 0 & , \quad 1/2 < |x| < 1 \\ 1 & , \quad 0 < x < 1/2 \\ -1 & , \quad -1/2 < x < 0 \end{cases} .$$

Los coeficientes b_n de la serie correspondiente son

$$b_n = \int_{-1}^{1} g(t)\sin(n\pi t)\,dt = 2\int_0^1 f(t)\sin(n\pi t)\,dt$$

$$= 2\int_0^{1/2} \sin(n\pi t)\,dt = (-2/n\pi)(\cos(n\pi/2) - 1) .$$

Ahora

$$\cos(n\pi/2) = \begin{cases} (-1)^{n/2} & , \quad \text{si } n \text{ es par} \\ 0 & , \quad \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} ;$$

de donde

$$b_n = \begin{cases} \dfrac{2}{n\pi} & , \quad \text{si } n \text{ es impar} \\ \dfrac{4}{n\pi} & , \quad \text{si } n = 4k+2 \text{ con } k \in \mathbb{N} \\ 0 & , \quad \text{si } n = 4k \text{ con } k \in \mathbb{N} \end{cases} .$$

b) Para obtener una serie de cosenos la extensión ha de ser par:

$$g(x) = \begin{cases} 0 & , \quad 1/2 < |x| < 1 \\ 1 & , \quad 0 < |x| < 1/2 \end{cases} .$$

Los coeficientes asociados son:

$$a_0 = \int_{-1}^{1} g(t)\,dt = 2\int_0^1 f(t)\,dt = 2\int_0^{1/2} dt = 1 ;$$

$$a_n = \int_{-1}^{1} g(t)\cos(n\pi t)\,dt = 2\int_0^1 f(t)\cos(n\pi t)\,dt$$

$$= 2\int_0^{1/2} \cos(n\pi t)\,dt = (2/n\pi)\sin(n\pi/2) , \quad n > 0 .$$

Ya que

$$\sin(n\pi/2) = \begin{cases} 0 & , \quad \text{si } n \text{ es par} \\ (-1)^{(n-1)/2} & , \quad \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} ,$$

tenemos

$$a_n = \begin{cases} 1 & , \quad \text{si } n = 0 \\ 0 & , \quad \text{si } n \text{ es par pero no } 0 \\ \dfrac{2(-1)^{(n-1)/2}}{n\pi} & , \quad \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} .$$

c) Ya que f es de módulo cuadrado integrable

$$\|f\|_2^2 = \int_0^1 |f(t)|^2\,dt = 1/2$$

y

$$\|g\|_2^2 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} |g(t)|^2\,dt = \int_0^1 |f(t)|^2\,dt = 1/2 ,$$

se tiene convergencia en media cuadrática de la serie de Fourier y se cumple la identidad de Parseval y por ello

$$1/2 = \|g\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{g}(n)|^2 \ .$$

Si tomamos la serie de b) en cosenos teniendo en cuenta que $\widehat{g}(n) = a_{|n|}/2$ en este caso, obtenemos

$$1/2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_{|n|}/2|^2 = |a_o/2|^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2/4 = |a_o/2|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^2(2n+1)^2} \ ;$$

o sea:

$$1/4 = \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \ ,$$

de modo que podemos afirmar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \pi^2/8 \ .$$

Problema 3: Dada la siguiente función por tramos:

$$f(x) = \begin{cases} 2\pi(x+\pi) & (-\pi < x < -\frac{\pi}{2}) \\ 4x^2 & (-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}) \\ 2\pi(-x+\pi) & (\frac{\pi}{2} < x \le \pi) \end{cases} \ ,$$

la cual se repite periódicamente con período 2π. Realice un gráfico sencillo de la función. Calcule la serie de Fourier con exponenciales complejas y responda:

a) ¿Converge la serie a $f(x)$ en todo punto?, justifique.

b) ¿Converge la serie uniformemente?, justifique.

c) ¿Converge en media cuadrática?, justifique.

Ayudas:

$$\int xe^{bx}dx = \frac{-1+bx}{b^2}e^{bx}, \qquad \int x^2e^{bx}dx = \frac{2-2bx+b^2x^2}{b^3}e^{bx}, \qquad b\in\mathbb{C}.$$

Solución: La función es par (en particular, $f(-\pi) = f(\pi)$), continua y diferenciable salvo en los puntos $\pm\pi/2$ donde la derivada tiene discontinuidad finita.

La serie de Fourier converge puntualmente en todo $[-\pi, \pi]$ en virtud de la continuidad y del hecho que f tiene finitos máximos y mínimos locales.

Sobre la convergencia puntual uniforme no podemos decir nada con estos datos; quizas el cálculo explícito de los coeficientes nos permita decir algo al respecto.

En virtud de la continuidad, f es acotada y por ende de módulo cuadrado integrable. Esto implica que la serie de Fourier converge en media cuadrática a f.

El cálculo de los coeficientes es largo y aburrido; se obtiene:

$$\widehat{f}(n) = -\frac{2(-1)^n}{n^2} + \frac{6\cos(n\pi/2)}{n^2} - \frac{8\sin(n\pi/2)}{\pi n^3}\ , \quad 0 \neq n \in \mathbb{Z}\ ,$$

lo que se podría procesar distinguiendo n par de n impar. Pero esto no nos interesa para lo que se quiere hacer que es analizar la convergencia. Se tiene[3]

$$|\widehat{f}(n)| \leq \frac{2}{n^2} + \frac{6}{n^2} + \frac{8|\sin(n\pi/2)|}{\pi|n|^3}\ ,$$

y como $|\sin(n\pi/2)| \leq |n|\pi/2$

$$|\widehat{f}(n)| \leq \frac{12}{n^2}\ .$$

De modo que, para $N = 1, 2, \cdots,$

$$|\sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}(n)e^{int}| \leq \sum_{n=-N}^{N} |\widehat{f}(n)| \leq |\widehat{f}(0)| + 24\sum_{n=1}^{N} n^{-2}$$

y la serie a la derecha es convergente. Por lo tanto, la serie de Fourier converge uniformemente en $[-\pi, \pi]$ lo que me alegra porque valió la pena calcular los coeficientes.

[3]lo que sigue es una de muchas estimaciones posibles.