FACULTAD DE MATEMÁTICA, ASTRONOMÍA Y FÍSICA, U.N.C.

Métodos Matemáticos de la Física I

Parcial 3 — 17/11/2015 — soluciones[1]

Problema 1: Calcule la solución del problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} - 2(1+t)(1+y^2) = 0, \quad y(0) = 0.$$

calcule además el intervalo de existencia de la solución $t \in (t_1, t_2)$.

Solución: La ec. es de primer orden separable y la integración separada entrega

$$\arctan(y) - c = t^2 + 2t = t(2+t) =: H(t) \ ,$$

donde c es una constante real. Podemos invertir el arctan sin problemas para escribir

$$y(t) = \tan(H(t) + c) \ ;$$

la condición inicial nos da

$$0 = y(0) = \tan(H(0) + c) = \tan(c) \ ,$$

de donde $c = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. Pero la función tan es π-periódica o sea que

$$y(t) = \tan(H(t)) = \tan(t(2+t)) \ . \tag{1}$$

Esto nos da la solución al problema de valores iniciales siempre que $y(t)$ esté definida para lo cual basta que $H(t)$ no sea múltiplo impar de $\pm\pi/2$. Ahora la parábola $t \mapsto H(t)$ tiene raices en $t = 0$ y en $t = -2$; su mínimo absoluto está en $t = -1$ con $H(-1) = -1$ que es mayor que $-\pi/2$. Por lo tanto no hay t real tal que $H(t)$ sea multiplo no nulo de $-\pi/2$. La ec.

$$H(t) = \pi/2$$

tiene, en cambio, soluciones $t_1 = -1 - \sqrt{1 + \pi/2}$ y $t_2 = -1 + \sqrt{1 + \pi/2}$. La solución local en un entorno de $t = 0$ dada por (1) se extiende a todo el intervalo abierto (t_1, t_2). Observe que $(t_1, t_2) \ni t \mapsto y(t)$ es decreciente en $(t_1, -1)$ y creciente en $(-1, t_2)$ con $\lim_{t \to t_1^+} y(t) = \infty$ y $\lim_{t \to t_2^-} y(t) = \infty$.
Como siempre es útil verificar que (1) es la solución:

$$y'(t) = \frac{H'(t)}{\cos(H(t))^2} = 2(1+t)(1 + \tan(H(t))^2) = 2(1+t)(1 + y(t)^2) \ ,$$

siempre que $H(t) \neq (2k+1)\pi/2$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.

Problema 2: Resuelva la ecuación diferencial

$$y''' - 2y = x^2 - 3x + 2 \ .$$

Ayuda: ¿Hay quizás una solución polinomial? Para la ecuación homogenea intente una función exponencial.

$$\cos(\pi \pm \pi/3) = -\cos(\pi/3) = -1/2 \ , \ \ \sin(\pi \pm \pi/3) = \mp \sin(\pi/3) = \mp\sqrt{3}/2 \ .$$

[1] G.A.R.

Solución: Claramente si y es un polinomio de grado 2 entonces $y''' = 0$. Planteando

$$y_o(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

la ec. dif. determina que $\alpha = -1/2$, $\beta = 3/2$ y $\gamma = -1$; o sea

$$y_o(x) = -x^2/2 + 3x/2 - 1$$

es solución de la ec. diferencial.
Si y_1, y_2 son dos soluciones de la ec. diferencial entonces $\varphi = y_1 - y_2$ satisface

$$\varphi''' = y_1''' - y_2''' = 2y_1 + x^2 - 3x + 2 - [2y_2 + x^2 - 3x + 2] = 2\varphi$$

y es por ende solución de la correspondiente ec. dif. homogenea

$$\varphi''' - 2\varphi = 0 \; ; \tag{2}$$

o, lo que es lo mismo toda solución de la ec. diferencial es de la forma $y = \varphi + y_o$ donde φ es solución de la ec. homogenea.
Planteamos a

$$\varphi(x) = e^{zx}$$

como solución de (2) donde z es complejo y hay que eventualmente tomar partes reales e imaginarias para obtener solución real. Ya que $\varphi^{(k)} = z^k \varphi$ obtenemos

$$z^3 - 2 = 0$$

como condición para z. Entonces

$$z = z_k = \sqrt[3]{2} \exp(i2k\pi/3) \; , \quad k = 0, 1, 2$$

son las tres raices:

$$z_o = \sqrt[3]{2} \; , \quad z_1 = \sqrt[3]{2}(\cos(2\pi/3) + i \sin(2\pi/3)) = \sqrt[3]{2} \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \; ,$$

$$z_2 = \sqrt[3]{2}(\cos(4\pi/3) + i \sin(4\pi/3)) = \sqrt[3]{2} \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \; ;$$

A ellas le corresponden las funciones

$$\varphi_o(x) = e^{\sqrt[3]{2}x} \; , \quad \varphi_1^c(x) = e^{-\sqrt[3]{2}x/2} \exp(i\sqrt[3]{2}\sqrt{3}x/2) \; , \quad \varphi_2^c(x) = e^{-\sqrt[3]{2}x/2} \exp(-i\sqrt[3]{2}\sqrt{3}x/2) \; ;$$

o alternativamente las soluciones reales

$$\varphi_o(x) = e^{\sqrt[3]{2}x} \; , \quad \varphi_1(x) = e^{-\sqrt[3]{2}x/2} \cos(\sqrt[3]{2}\sqrt{3}x/2) \; , \quad \varphi_2(x) = e^{-\sqrt[3]{2}x/2} \sin(\sqrt[3]{2}\sqrt{3}x/2) \; .$$

La solución general de la ec. diferencial dada es entonces

$$y = c_o\varphi_o + c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + y_o$$

con constantes reales c_o, c_1 y c_2.

Problema 3: Determine la solución del problema de Cauchy

$$2xe^{2y}y' = 3x^4 + e^{2y} \; , \quad y(1) = 0 \; .$$

Ayuda: Observe que la dependencia en y es sólo vía e^{2y}.

Solución: Si definimos $u(x) = e^{2y(x)}$ obtenemos $u'(x) = 2u(x)y'(x)$ de modo que

$$xu'(x) = 2xu(x)y'(x) = 2xe^{2y(x)}y'(x) = 3x^4 + e^{2y(x)} = 3x^4 + u(x)$$

o sea:

$$xu' - u = 3x^4 \ , \quad u(1) = 1 \ .$$

La ec. homogenea $xu' - u$ tiene la propiedad de que en cada sumando la potencia de x menos el orden de la derivada de u involucrada es cero (ec. dif. de Euler). Esto implica que cualquiera sea la potencia ν si $f(x) = x^\nu$ entonces $xf' + f \propto f$. Planteando $u(x) = cx^4$ obtenemos

$$4cx^4 - cx^4 = 3x^4$$

o sea $c = 1$ y

$$u_o(x) = x^4$$

es solución. Pero $u_o(1) = 1$ y por el teorema de unicidad (y existencia) hemos resuelto el problema. Deshaciendo la transformación, para $x > 0$ (lo que comprende el valor $x = 1$)

$$y(x) = \frac{1}{2}\ln(u(x)) = 2\ln(x) \ , \quad x > 0$$

es la solución del problema de Cauchy dado. Esto se puede por supuesto (y se debe) verificar derivando.

Para dubitativos: la solución general de $xu' - u = 3x^4$ es $u_o(x) + \alpha x$ siendo que αx es la solución general de la ec. dif. homogenea $xu' - u = 0$ (esto se desprende, por ejemplo, separando y integrando directamente). La condición de Cauchy $u(1)$ implica que $\alpha = 0$.

Alternativa para cultores de las ec. dif. exactas: La ec. dada no es exacta (¡verifiquelo!) pero $1/x^2$ es un factor integrante. Entonces

$$\underbrace{\frac{2e^{2y}}{x}}_{M}\, y' \underbrace{-3x^2 - \frac{e^{2y}}{x^2}}_{N} = 0$$

si lo es pues

$$\frac{\partial M}{\partial x} = -2x^{-2}e^{2y} = \frac{\partial N}{\partial y} \ .$$

La integración parcial a x fijo de

$$\frac{\partial F}{\partial y} = M$$

da

$$F(x, y) = x^{-1}e^{2y} + \alpha(x) \ ,$$

que derivado respecto de x entrega

$$-x^{-2}e^{2y} + \alpha'(x) = N = -3x^2 - \frac{e^{2y}}{x^2}$$

de modo que

$$\alpha'(x) = -3x^2$$

por ende

$$\alpha(x) = -x^3 + c \ ;$$

y entonces

$$0 = F(x, y) = -x^3 + x^{-1}e^{2y} + c \ .$$

De la condición inicial $0 = F(1,0) = c$ de modo que $x^3 = e^{2y}/x$ o sea $2y = \ln(x^4)$ y $y(x) = 2\ln(x)$.

Problema 4: Encuentre la solución general de

$$x^2y'' - 3xy' + 4y = \sqrt{x}, \qquad x \in (0,\infty)$$

Ayuda: Note que $y_1(x) = x^2$ resuelve el problema homogéneo.

Solución: La ec. dif. homogenea asociada

$$x^2p'' - 3xp' + 4p = 0$$

es una ec. diferencial lineal de Euler que tiene la singular propiedad de que en cada sumando la potencia de x menos el grado de la derivada de p es nulo. Entonces si $p(x) = \alpha x^\nu$ con α y ν reales tenemos que

$$p(x) \propto x^2p''(x) - 3xp'(x) + 4p(x) = [\nu(\nu-1) - 3\nu + 4]p(x) = (\nu-2)^2p(x)\ .$$

Tomando $\nu = 1/2$ obtenemos

$$x^2p''(x) - 3xp'(x) + 4p(x) = \frac{9}{4}p(x) = \frac{9\alpha}{4}x^{1/2}$$

de modo que $\alpha = 4/9$ nos produce una solución

$$y_o(x) = 4\sqrt{x}/9\ .$$

La solución general se obtiene sumando la solución general de la ec. homogenea. Una solución de la ec. homgenea se obtiene de lo antedicho con $\nu = 2$:

$$p_1(x) = x^2\ .$$

Hemos discutido en clase (pero vea más abajo) que cuando el polinomio indicial de una ec. de Euler (en nuestro caso $(\nu-2)^2$) tiene una sola raíz ν entonces la otra solución de la ec. homogenea es $x^\nu\ln(x)$. En nuestro caso

$$p_2(x) = x^2\ln(x)\,;\ \ x > 0$$

es otra solución linealmente independiente de p_1. Entonces

$$y(x) = \alpha x^2 + \beta x^2\ln(x) + 4\sqrt{x}/9$$

con constantes reales α y β, es la solución general de nuestra ecuación en el intervalo $(0,\infty)$.

Si planteamos con el método de variación de constantes que $p_2(x) = u(x)p_1(x)$ entonces insertando en la ec. dif. homogenea obtenemos

$$0 = x^3(xu'' + u')\ .$$

Con $u' =: s$ la ec. dif. $xu'' + u' = 0$ es equivalente a $xs' + s = 0$; esto es separable con solución $s(x) = c/x$ (c real) de donde $u(x) = a\ln(x) + b$ y luego $p_2(x) = ax^2\ln(x) + bx^2$. Como el sumando proporcional a x^2 ya está en p_1 y como podemos tomar $a = 1$, $p_2(x) = x^2\ln(x)$ es una solución de la ec. homogenea. Además,

$$W_{p_1,p_2}(x) = p_1(x)p_2'(x) - p_1'(x)p_2(x) = x^3$$

no se anula en $(0,\infty)$ con lo cual p_1 y p_2 son linealmente independientes.