FACULTAD DE MATEMÁTICA, ASTRONOMÍA Y FÍSICA, U.N.C.

Métodos Matemáticos de la Física I – 2015

Resumen de las clases

1. *11/08* Adición y multiplicación de complejos (asociatividad); distributividad; inversión y división. Partes real e imaginaria. Representación como par ordenado de números reales; suma y multiplicación. Valor absoluto o módulo (propiedades); complejo conjugado (relaciones para); $|z|^2 = z\,\overline{z}$. Desigualdad del triángulo (varias variantes). Representación polar; argumento arg; argumento principal Arg. La exponencial compleja $\exp\{z\} := e^x(\cos(y) + i\sin(y))$ y sus propiedades básicas:

$$\exp\{z_1\}\exp\{z_2\} = \exp\{z_1 + z_2\} \ ,$$

$\exp\{i2m\pi\} = 1$ ($m \in \mathbb{Z}$), $i2\pi$ periodicidad, $\exp\{z\} \neq 0$. La representación polar y la multiplicación: $z_1 z_2 = |z_1 z_2| \exp\{i(\alpha+\beta)\}$, $\alpha \in \arg(z_1)$, $\beta \in \arg(z_2)$; $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$.

2. *13/08* Potencias enteras. Raices; $z^{1/q}$ para $2 \leq q \in \mathbb{N}$; resultado básico (q raices distintas y fórmula para ellas). Potencias racionales.
Discos (abiertos, cerrados y pinchados), entornos. Puntos interiores y puntos de frontera de un conjunto de números complejos. Conjuntos abiertos, conjuntos cerrados. Conjuntos conexos. Conjuntos acotados.
Límite de una sucesión de complejos. Sucesiones de Cauchy y criterio necesario y suficiente de convergencia.

$$z_n \to z \iff \overline{z_n} \to \overline{z} \iff Re(z_n) \to Re(z) \ \& \ Im(z_n) \to Im(z) \ .$$

$z_n \to z$ implica que $|z_n| \to |z|$ pero no al revés.
Funciones complejas. Las funciones asociadas $|f|$, $Re(f)$ y $Im(f)$. $f = u + iv$ como notación; $u(x,y) := Re(f(x+iy))$, $v(x,y) := Im(f(x+iy))$. Continuidad de una función en un punto. La suma y el producto de funciones continuas en un punto es continua en ese punto. Ejemplos.

3. *18/08* Continuidad de la función $z \mapsto exp\{z\}$. Discontinuidad de la función $z \mapsto Arg(z)$ en la semirecta (real negativa) $\{z \in \mathbb{C} : Im(z) = 0\,,\ Re(z) < 0\} = \{z \in \mathbb{C} : Arg(z) = \pi\}$. Discontinuidad de las ramas $f_{\pm}(z) = \pm\sqrt{|z|}\exp\{iArg(z)/2\}$.
Derivada de una función compleja en un punto. Existencia y fórmulas para la derivada de una suma y de un producto de funciones diferenciables en un punto. Regla de la cadena. Derivadas de las funciones $z \mapsto z^n$ con $n \in \mathbb{Z}$. Derivada de una rama $f(z) = z^{1/m}$ de la m-ésima raíz ($m \in \mathbb{N}$, $m \neq 0$): $f'(z) = m^{-1}(f(z))^{1-m}$.
Derivadas parciales y ecuaciones de Cauchy-Riemann.
Teorema: Si en un abierto $A \subset \mathbb{R}^2$ las funciones reales $u, v : A \to \mathbb{R}$ tienen derivadas parciales continuas en el punto $(x_o, y_o) \in A$ y se satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en (x_o, y_o) entonces $f(z) := u(x,y) + iv(x,y)$, $z = x + iy$, $(x,y) \in A$ es diferenciables en $z_o = x_o + iy_o$ y se tiene

$$f'(z_o) = (\partial u/\partial x)(x_o, y_o) + i(\partial v/\partial x)(x_o, y_o) = (\partial v/\partial y)(x_o, y_o) - i(\partial u/\partial y)(x_o, y_o) \ .$$

Un dominio en $\mathbb{C}$ es un conjunto abierto y conexo en $\mathbb{C}$. Si $f'(z) = 0$ para todo z en un dominio entonces $f(z) = \alpha$ con $\alpha \in \mathbb{C}$ (f es constante). En un dominio D hay equivalencia de: (i) $f'(z) = 0$ para todo $z \in D$; (ii) f es constante en D; (iii) $z \mapsto Re(f(z))$ es constante en D; (iv) $z \mapsto Im(f(z))$ es constante en D; (v) $z \mapsto |f(z)|$ es constante en D.

4. *20/08* Analiticidad de la exponencial. El conjunto $\log(z)$ para $z \neq 0$; $\log(z) = \ln(|z|) + iarg(z)$; $z = \exp(\log(z))$ pero $\log(\exp(z)) = z + i2m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$; $\log(z_1 z_2) = \log(z_1) + \log(z_2)$; rama principal $Log(z) = \ln(|z|) + iArg(z)$ y su continuidad fuera de la recta real negativa. Derivada de cualquier rama $f(z)$ del logaritmo: $f'(z) = 1/z$. $z \mapsto Log(z)$ es analítica fuera de la semi-recta real no-positiva $\{z \in \mathbb{C} : Im(z) = 0\,,\ Re(z) \leq 0\}$.
   Repetición: discontinuidad de $z \mapsto Arg(z)$ en la semi-recta real no-positiva.
   Potencias arbitrarias de z: $z^\alpha = \exp(\alpha \log(z))$; $z^\alpha z^\beta = z^{\alpha+\beta}$; consistencia con la definición anterior para α real racional. Si α no es un real racional hay (denumerablemente) infinitas α-potencias de $z \neq 0$. $e^z = \exp(z)\exp(i2nz\pi)$, $n \in \mathbb{Z}$; es convencional definir $z \mapsto e^z$ como la rama "principal" (o sea con Arg) en cuyo caso si $e^z = \exp(z)$.

5. *25/08* Funciones armónicas; armónica conjugada; ejemplos.
   Integración de funciones complejas de una variable real sobre un intervalo finito; propiedades básicas (aditividad); $|\int_a^b f(t)\,dt| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt$ is $b \geq a$.
   Caminos suaves $[a,b] \ni t \mapsto z(t) \in \mathbb{C}$ con $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$ continua; ejemplos. Camino = concatenación de caminos suaves de modo que el punto final de cada eslabón coincida con el punto inicial del siguiente eslabón; notación $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n$. Traza $[\gamma]$ de un camino γ. Caminos simples ("inyectivos") y cerrados. Teorema de Jordan.
   Integral de una función compleja definida en un abierto Ω sobre un camino suave γ ($[a, b \ni t \mapsto z(t) \in \Omega$) tal que $[\gamma] \subset \Omega$: $\int_\gamma f(z)\,dz := \int_a^b f(z(t))\,z'(t)\,dt$.

6. *27/08* La integral sobre caminos y sus propiedades básicas. Largo de un camino (ejemplos).
   Primitivas de una función compleja;
   Teorema: Si γ es un camino y la función f es continua en un abierto que contiene a $[\gamma]$ y admite una primitiva F en ese abierto entonces $\int_\gamma f(z)\,dz = F(z_2) - F(z_1)$ donde z_2 y z_1 son respectivamente el punto final y el punto inicial de γ;
   Teorema(fundamental): Sea f una función continua en un abierto A que es union de finitos dominios disjuntos; entonces las siguientes condiciones son equivalentes: (1) $\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\Gamma f(z)\,dz$ para cualquier par de caminos en A que tienen puntos iniciales y finales idénticos; (2) $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ para cualquier camino cerrado γ en A; (3) Hay una primitiva de f en A.
   Ejemplos: para cualquier camino cerrado γ en $\mathbb{C}$

$$\int_\gamma z^n\,dz = 0 \ \ (n \geq 0)\ , \quad \int_\gamma \frac{1}{z^n}\,dz = 0 \ \ (n \geq 2)\ .$$

   Pero para el camino circular $C_r = \{[0, 2\pi] \ni t \mapsto r\exp(it)\}$ (círculo de radio $r > 0$ centrado en 0 recorrido positivamente una vez) se tiene

$$\int_{C_r} \frac{1}{z}\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{ir\exp(it)}{r\exp(it)}\,dt = 2\pi i\ ;$$

   $z \mapsto 1/z$ no admite primitiva en cualquier abierto que contenga un disco centrado en 0.
   Comparación con el análisis real y la sorpresa del Teorema de Cauchy-Goursat.

7. *01/09* Repaso del Teorema de Green en el plano $\mathbb{R}^2$. Teorema de Cauchy-Goursat. Dominios simplemente conexos.
   "Deformación" de caminos en dominios.
   Desigualdad ML. Teorema Fundamental del Cálculo.

8. *03/09* Ejemplos de integración (ramas de la raíz cuadrada). Fórmula de integración por partes.
Fórmula Integral de Cauchy; aplicaciones y ejemplos. Fórmula de integración basadas en deformaciones y cancelaciones:
$$\int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}\,dz = 2\pi i\left(\frac{f(a)}{a-b}+\frac{f(b)}{b-a}\right)$$
cuando γ encierra a a y a b.
Fórmula Integral de Cauchy para la n-ésima derivada de una función analítica.

9. *08/09* Aplicaciones del Teorema de Cauchy-Goursat y de la fórmula de Cauchy: Teorema de Liouville y Teorema Fundamental del Álgebra. Convergencia de la serie de Taylor
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_o)}{n!}\,(z-z_o)^n$$
de una función f analítica en un entorno E de z_o a $f(z)$ para todo $z \in E$; y convergencia uniforme en todo disco cerrado centrado en z_o y contenido en E.

10. *10/09* Recapitulación: convergencia, convergencia absoluta y convergencia uniforme. Resultados fundamentales:
Teorema: Si la serie de potencias $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(z-z_o)^n$ converge para z en un disco abierto no vacio $D(z_o,r)$ a $f(z)$ entonces f es analítica en ese disco y la serie de Taylor coincide con la serie original; $a_n = f^{(n)}(z_o)/n!$.
La serie de Taylor de la derivada de f se obtiene derivando término a término. La integración puede realizarse término a término.
Teorema: Dada una serie de potencias $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(z-z_o)^n$ existe un número real $R \geq 0$ o bien $R = \infty$ de modo que: (i) La serie converge absolutamente en $D(z_o,R)$; (ii) la serie converge absoluta- y uniformemente en todo disco cerrado centrado en z_o contenido en $D(z_o,R)$; (iii) la serie diverge fuera de $\overline{D(z_o,R)}$.
Comentarios generales sobre el radio de convergencia R (criterios del cociente y de la raíz, etc.). Ejemplo:
$$\exp(z) := \sum_{n\in\mathbb{N}} z^n/n!\ ,$$
$R=\infty$, exp es entera y $\exp' = \exp$ por derivación término a término.

Series de Laurent: Motivación y ejemplo (de una serie en potencias negativas): Desarrollo de $1/(z-2)$ alrededor de $z_o = 1$.
$$\frac{1}{z-2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z-1)^n}\ ,\quad |z-1| > 1\ .$$
Teorema $\uparrow$ *:* Sean $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(z-z_o)^n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}\frac{1}{(z-z_o)^n}$ dos series formales tales que: (i) La primera serie (potencias no-negativas) converge en un disco abierto $D(z_o,R_2)$ de radio R_2; (ii) La segunda serie (potencias negativas) converge fuera del disco cerrado $\overline{D(z_o,R_1)}$ de radio R_1; (iii) $R_1 < R_2$. Entonces la serie (de Laurent)
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-z_o)^n$$
converge a una función analítica f en el anillo abierto $A := \{z\in\mathbb{C} :\ R_1 < |z-z_o| < R_2\}$ y lo hace uniformemente en todo anillo cerrado contenido en A.

Teorema ↓ *:* Si f es analítica en un anillo abierto A entonces admite un único desarrollo en serie de Laurent convergente en A y este desarrollo converge uniformemente en todo anillo cerrado contenido en A . Se tiene

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w - z_o)^{n+1}}\, dw \ , \quad n \in \mathbb{Z} \ , \tag{1}$$

cualquiera sea el camino cerrado simple orientado positivamente γ contenido en A que encierra a z_o.

Ejemplo: Desarrollos de Laurent de $f(z) = (z^2 - 2z + 3)/((z - 2)(z - 1))$, $1 \neq z \neq 2$. Usando la convergencia de la serie geométrica

$$(z-1)^{-1} = -\sum_{n\in\mathbb{N}} z^n \ , \ |z| < 1 \ , \ \ (z-1)^{-1} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{z^{n+1}} \ , \ |z| > 1 \ ;$$

$$(z-2)^{-1} = -\frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{N}} (z/2)^n \ , \ |z| < 2 \ , \ \ (z-2)^{-1} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{2^n}{z^{n+1}} \ , \ |z| > 1 \ ;$$

$$f(z) = \frac{3}{2} + \frac{5}{4}z + \frac{13}{4}z^2 + \cdots \ , \ |z| < 1 \ ;$$

$$f(z) = \cdots - \frac{2}{z^2} - \frac{2}{z} - \frac{1}{2} - \frac{3}{4}z - \frac{3}{8}z^2 + \cdots \ , \ \ 1 < |z| < 2 \ ;$$

$$f(z) = 1 + \frac{1}{z} + \frac{4}{z^2} + \frac{7}{z^3} + \cdots \ , \ \ |z| > 2 \ .$$

Estos son los tres desarrollos de f centrados en $z_o = 0$.

11. *15/09* Ceros de funciones analíticas; propiedades (orden, discreto,...); regla de L'Hôpital.
    Singularidades, singularidades aisladas y tipos (removibles, polos, esenciales); ejemplos ($P(z)/Q(z)$, $\sin(z)/z$, $\sin(1/z)$, rama de $\log(z)$).
    Polos y su orden. Clasificación y comportamiento de $|f(z)|$ para $z \to z_o$. Residuo.

12. *17/09* Integración de la serie de Laurent alrededor de una singularidad aislada z_o en un camino cerrado simple que la encierra; residuo $Res(f, z_o)$. Fórmula general para el residuo en un polo de orden m. Fórmulas particulares para $Res(f/g; z_o)$ con f, g analíticas con z_o un cero de orden 1 o 2 de g.
    Teorema de los residuos. Aplicación al cálculo de integrales reales definidas: la idea general.
    Integrales de funciones racionales de $\sin(\varphi)$ y $\cos(\varphi)$ sobre el intervalo $[0, 2\pi]$:

    $$\int_0^{2\pi} \widetilde{F}(\cos(\varphi), \sin(\varphi))\, d\varphi = 2\pi \sum_{\{z:\text{ polo de } F \text{ con } |z|<1\}} Res(F, z) \ ,$$

    donde $F(z) = z^{-1}\widetilde{F}((z + z^{-1})/2, (z - z^{-1})/2i)$.

    Integrales impropias de funciones reales sobre la recta real (tipos y sus definiciones); valor principal de Cauchy. Cálculo via el Teorema de los residuos: idea general.

    $$\int_{-R}^{R} f(x)dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} Res(f, z_j) - iR\int_0^\pi f(R\exp(it))\exp(it)dt \ ,$$

donde f es continua en $\mathbb{R}$, y analítica en el semiplano superior abierto $\{z : Im(z) > 0\}$ salvo en un número finito de puntos aislados $\{z_j : j = 1, 2, \cdots, n\}$ de ese semiplano. El problema

$$\lim_{R\to\infty} R \int_0^{\pi} f(R\exp(it))\exp(it)dt \stackrel{?}{=} 0 \ . \tag{2}$$

Teorema: Si $f = P/Q$ es cociente de polinomios P y Q con grado de Q mayor o igual al grado de P más 2 entonces (2) se cumple y si Q no tiene ceros reales

$$p.v. \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{\{\text{ceros } z \text{ de } Q \text{ con } Im(z)>0\}} Res(f, z) \ .$$

Ejemplo: $\int_{-\infty}^{\infty}(1 + x^2)^{-1}\, dx = \pi$. 1) La integral impropia existe y es igual a su valor principal; 2) i es la única singularidad de $f(z) = 1/(1 + z^2)$ en el semiplano superior y $Res(f, i) = 1/2i$.

13. *22/09* Primer parcial.

14. *24/09* Nadie vino.

15. *29/09* Integración alrededor de una singularidad real. Suponese que la función real sobre los reales f tiene una singularidad en x_o que es un polo simple y se quiere calcular el valor principal

$$p.v \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{R\to\infty\,,\ \epsilon\to 0^+} \left(\int_{-R}^{x_o-\epsilon} f(x)dx + \int_{x_o+\epsilon}^{R} f(x)dx \right) \ .$$

Consideramos una función f analítica en el semi-plano superior (podría tomarse el semi-plano inferior) salvo en singularidades aisladas $\{z_k : k = 1, 2, \cdots, n\}$ que coincida con la función real dada al restringirla a los reales. Atención: $Im(z_k) > 0$. Tomamos los semi-círculos C_R^+ y C_ϵ^+ del semi-plano superior (podrían tomarse en el semi-plano inferior) centrados en x_o de radios R y ϵ respectivamente. Estos semi-círculos conservan la orientación que tienen como partes de los círculos completos orientados positivamente. Suponemos que $|x_o| + \epsilon < R$ y, concatenando con los segmentos reales $[x_o + \epsilon, R]$ y $[-R, x_o - \epsilon]$, tenemos

$$\int_{[x_o+\epsilon,R]} f(z)dz + \int_{C_R^+} f(z)dz + \int_{[-R,x_o-\epsilon]} f(z)dz + \int_{-C_\epsilon^+} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res(f, z_k) \ .$$

Tenemos

$$\int_{[x_o+\epsilon,R]} f(z)\, dz + \int_{[-R,x_o-\epsilon]} f(z)\, dz = \left(\int_{-R}^{x_o-\epsilon} f(x)dx + \int_{x_o+\epsilon}^{R} f(x)dx \right) \ .$$

Supongamos que f es tal que la contribución de C_R^+ se anula cuando $R \to \infty$. Nos queda el análisis de la integral sobre C_ϵ^+.

Lema: Suponga que la función h es analítica en un entorno pinchado de z_o donde tiene un polo simple. Sea

$$S_r(z_o; \theta_1, \theta_2) := \{z(\theta) = z_o + r\exp(i\theta) : \theta_1 \le \theta \le \theta_2\}$$

el segmento de arco de radio r centrado en z_o entre los argumentos θ_1 y θ_2 entonces

$$\lim_{r\to 0} \int_{S_r(z_o;\theta_1,\theta_2)} f(z)\, dz = i(\theta_2 - \theta_1)Res(h, z_o) \ .$$

Se dió la demostración de esto.

Regresando a nuestro problema,

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{C_\epsilon^+} f(z)\,dz = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{S_\epsilon(x_o;\pi,0)} f(z)\,dz = i\pi Res(f,x_o)$$

y entonces

$$p.v.\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = i\pi Res(f,x_o) + 2\pi i\sum_{k=1}^{n} Res(f,z_k)$$

siempre y cuando la contribución de C_R^+ se anule en el límite $R\to\infty$ (y x_o sea polo simple de f).

Integrales impropias de funciones trigonométricas. Considere integrales del tipo

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(cx)\,dx\ ,\quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(cx)\,dx\ ,$$

que resultan ser las partes real e imaginaria de la transformada de Fourier de f. Si f es racional y el grado del polinomio del denominador es mayor o igual que 2 mas el grado del polinomio numerador, ya sabemos que la contribución de una integral sobre C_R^+ se anula para $R\to\infty$. Es notable que cuando multiplicamos a f por una función trigonométrica podemos ganar una potencia.

Lema de Jordan: Si $a>0$, entonces $\int_0^\pi \exp(-a\sin(\varphi))\,d\varphi < \pi/a$. Demostración de esto.

Lema: Si $f=P/Q$ es cociente de polinomios P y Q con grado de Q mayor o igual a 1 mas el grado de P entonces para $c>0$ se tiene

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R^+} f(z)\exp(icz) = 0\ .$$

Demostración de esto.

Aplicación al cálculo de integrales. Ejemplo: $p.v.\int_{-\infty}^{\infty}[x\exp(ix)/(1+x^2)]\,dx$.

Integración a lo largo de un corte de ramificación. Introducción via $\int_0^\infty x^\alpha g(x)\,dx$ con α real. $f(z) =$ "z^α" $g(z)$ donde ha de tomarse una rama de la α-ésima potencia. Es conveniente

$$\phi(z) = \exp(\alpha\ln(|z|) + i\alpha\theta)\ ,\quad 0\le\theta<2\pi\ ,\quad \theta\in\arg(z)\ .$$

Entonces al restringirse a los reales positivos estamos integrando justo a lo largo del corte de ramificación. ¡la función es continua sobre este corte como función real! $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$; pero hay una discontinuidad compleja:

$$\lim_{z\to x\ ,\ Re(z)>0}\phi(z) = x^\alpha\ ,\quad \lim_{z\to x\ ,\ Re(z)<0}\phi(z) = x^\alpha\exp(i\alpha 2\pi)\ .$$

16. *1/10* Integración a lo largo de un corte de ramificación. Ejemplos:

1) $\int_0^\infty 1/(\sqrt{x}(x+a))\,dx$ para $a>0$. Definir $f(z)=\phi(z)/(z+a)$ donde ϕ es la rama de $z^{-1/2}$ especificada por

$$\phi(z) := \exp(-(\ln(|z|)/2) - i\theta/2)\ ,\ \ 0\le\theta<2\pi\ ,\ \ \theta\in\arg(z)\ ,$$

que es analítica fuera del semi-eje real no-negativo. Caminos para $0<\epsilon<R$:

$$\gamma^+ := [\epsilon,R]\ ,\ \ \gamma^- := \{R-t:\ 0\le t\le R-\epsilon\}\ ,$$

y los círculos C_R y C_ϵ orientados positivamente centrados en $z=0$ de radios R y ϵ y punto inicial R y ϵ respectivamente. Definimos las funciones

$$f^+(x) := \phi(x)/(x+a) = \frac{1}{\sqrt{x}(x+a)}\ ,\ \ f^-(x) := -\phi(x)/(x+a) = -\frac{1}{\sqrt{x}(x+a)}\ ,$$

para $x>0$ y observamos que para todo $x>0$

$$\lim_{z\to x\,,\,Im(z)>0} f(z) = f^+(x)\ ,\ \ \lim_{z\to x\,,\,Im(z)<0} f(z) = f^-(x)\ .$$

Con

$$\Gamma_{R,\epsilon} = (\gamma^+) + (C_R) + (\gamma^-) + (-C_\epsilon)\ ,$$

se tiene (para R los suficientemente grande y ϵ lo suficientemente chico)

$$2\pi i Res(f,-a) = \int_{\gamma^+} f^+(z)dz + \int_{C_R} f(z)\,dz + \int_{\gamma^-} f^-(z)\,dz - \int_{C_\epsilon} f(z)\,dz\ .$$

Lo importante a observar aquí es que los integrandos son <u>continuos</u> en la traza del camino. En efecto, $f=f^+$ en el segmento $[\epsilon,R]$ es continua y su valor en el punto final R es $f(R)=f^+(R)=1/(\sqrt{R}(R+a)$; recorriendo C_R a partir de R volvemos a R pero ahora

$$\lim_{\theta\to2\pi} f(R\exp(i\theta)) = \lim_{\theta\to2\pi}\frac{\phi(R\exp(i\theta))}{R\exp(i\theta)+a}$$

$$= \lim_{\theta\to2\pi}\frac{\exp(-i\theta/2)}{\sqrt{R}(R\exp(i\theta)+a)} = -\frac{1}{\sqrt{R}(R+a)} = f^-(R)\ ;$$

continuando por γ^- integramos f^- hasta llegar a ϵ; allí debemos pasar al círculo de radio ϵ orientado negativamente hasta volver ϵ donde ahora $f(\epsilon)=f^+(\epsilon)$. Ahora,

$$\int_{\gamma^+} f^+(z)\,dz = \int_\epsilon^R \frac{1}{\sqrt{x}(x+a)}\,dx\ ,$$

$$\int_{\gamma^-} f^-(z)\,dz = \int_0^{R-\epsilon}\frac{-1}{\sqrt{R-t}((R-t)+a)}\,(-dt) = \int_\epsilon^R \frac{1}{\sqrt{x}(x+a)}\,dx\ .$$

Estimamos

$$\left|\int_{C_R} f(z)\,dz\right| = \left|iR\int_0^{2\pi} f(R\exp(i\theta))\,\exp(i\theta)\,d\theta\right|$$

$$\le R\int_0^{2\pi}\frac{|\exp(-(\ln(R)/2)-i\theta/2)|}{R\exp(i\theta)+a|} \le R\int_0^{2\pi}\frac{R^{-1/2}}{|R-a|} = \frac{2\pi\sqrt{R}}{|R-a|}\ ;$$

de donde deducimos que la contribución de C_R se anula para $R\to\infty$. También,

$$\left|\int_{C_\epsilon} f(z)\,dz\right| \le \frac{2\pi\sqrt{\epsilon}}{|\epsilon-a|}\ ,$$

de modo que la contribución de C_ϵ se anula cuando $\epsilon \to 0$. El residuo a calcular es:

$$Res(f,-a) = \phi(-a) = \exp(-(\ln(a)/2) - i\pi/2) = -i/\sqrt{a}\ .$$

Finalmente,

$$2\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(x+a)}\, dx = 2\pi i Res(f,-a) = 2\pi/\sqrt{a}\ ;,$$

vale decir

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(x+a)}\, dx = \pi/\sqrt{a}\ ,\quad a > 0\ .$$

2) Buscamos $J := \int_0^\infty (\ln(x)/(1+x^2))\, dx$. Tomando $f(z) = \phi(z)/(z^2+1)$ con

$$\phi(z) = \ln(|z|) + i\theta\ ,\quad 0 \leq \theta < 2\pi\ ,\quad \theta \in \arg(z)\ ,$$

y considerando el mismo camino cerrado $\Gamma_{R,\epsilon}$ que en el ejemplo anterior se produce un desastre. Tenemos la integral que queremos al integrar sobre γ^+

$$\int_{\gamma^+} f(z)\, dz = \int_\epsilon^R \frac{\ln(x)}{x^2+1}\, dx\ ;$$

pero al empalmar con γ^- debemos tomar la función

$$f^-(x) = \frac{\ln(x) + i2\pi}{x^2+1}$$

y entonces

$$\int_{\gamma^-} f(z)\, dz = -\int_\epsilon^R \frac{\ln(x) + i2\pi}{x^2+1}\, dx\ ,$$

de modo que al sumar las contribuciones de γ^+ y γ^- perdimos la integral que nos interesa.
Consideramos los semi-círculos C_R^+ y C_ϵ^+ de radios R y ϵ en el semi-plano superior y los concatenamos a un camino cerrado simple $\Sigma_{R,\epsilon}$ via los segmentos $\gamma^+ := [\epsilon, R]$ y $\tau = [-R, -\epsilon]$. Para R lo suficientemente grande y ϵ lo suficientemente chico el camino encierra solamente el polo simple $z = i$ de f y por ende

$$2\pi i Res(f,i) = \int_{\gamma^+} f^+(z) dz + \int_{C_R^+} f(z)\, dz + \int_\tau f^-(z) + \int_{C_\epsilon^+} f(z)\, dz\ .$$

Ahora

$$\int_{\gamma^+} f^+(z) dz = \int_\epsilon^R (\ln(x)/(1+x^2))\, dx\ ;$$

$$\int_\tau f^-(z)\, dz = \int_{-R}^{\epsilon} \frac{\ln(|x|) + i\pi}{x^2+1}\, dx = \int_\epsilon^R \frac{\ln(x) + i\pi}{1+x^2}\, dx\ .$$

Estimamos

$$\left|\int_{C_R^+} f(z)\, dz\right| = \left| iR\int_0^\pi \frac{\ln(R) + i\theta}{R^2\exp(i2\theta) + 1}\ \exp(i\theta)\, d\theta\right|$$

$$\leq R\int_0^\pi \frac{|\ln(R) + i\theta|}{|R^2 - 1|}\, d\theta \leq R\int_0^\pi \frac{|\ln(R)| + \theta}{|R^2-1|}\, d\theta = \frac{R|\ln(R)|\pi + R(\pi^2/2)}{|R^2-1|}\ .$$

Ahora,
$$\lim_{R\to\infty} \frac{R|\ln(R)|\pi + R(\pi^2/2)}{|R^2-1|} = 0 \; ,$$
pero también
$$\lim_{\epsilon\to 0} \frac{\epsilon|\ln(\epsilon)|\pi + \epsilon(\pi^2/2)}{|\epsilon^2-1|} = 0 \; .$$
El residuo necesario es
$$Res(f,i) = \frac{\phi(i)}{2i} = \frac{i\pi/2}{2i} = \pi/4 \; .$$
Entonces
$$J = \pi i(\pi/4) - i(\pi/2)\int_0^\infty (1/(x^2+1))\, dx \; .$$
El cálculo de la integral que queda ya ha sido hecho. El resultado es.....

Recapitulación de las herramientas generales. Ejemplo de truco: $\int_0^\infty (1/(x^n+1))\, dx$ para $n = 2, 3, \cdots$, usando el camino $[0, R] + \{R\exp(i\theta) : 0 \le \theta \le 2\pi/n\} + \{(R - t)\exp(i2\pi/n) : 0 \le t \le R\}$.
Breves comentarios sobre las ideas detrás de las series de Fourier.

17. *6/10*

18. *8/10*

19. *13/10*

20. *20/10* Ortogonalidad. Complemento ortogonal. Teorema de Pitagoras.
Dependencia e independencia lineal en EVs. Bases y dimensión. Sistemas ortonormales en EVs con producto escalar; bases ortonormales y "coeficientes de Fourier" de un vector; convergencia de series; fórmulas para el producto escalar y para la norma (Parseval).

21. *23/10* Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO). Introducción y motivación en dos ejemplos. ¿Que es una EDO? Orden.

La EDO lineal de primer orden $y' = ky$. Discusión del caso $k = 0$ y del caso $k \neq 0$.
La solución $\Phi_A(x) = Ae^{kx}$, $A \in \mathbb{R}$. Determinación de la constante A pidiendo que $y(x_o) = y_o$ (la solución pasa por un punto (x_o, y_o) del plano); $A = y_o e^{-kx_o}$
Lema (de unicidad): Si Φ es solución y $\Phi(0) = 0$ entonces $\Phi \equiv 0$.
Demostración de unicidad de la solución que pasa por algún punto. Dependencia "continua" de la solución de k y del punto donde uno quiere que pase.

La EDO no-lineal de primer orden $y' = y^{1/3}$. Construcción de las soluciones
$$\phi_b^{(\pm)} := \pm\sqrt{\frac{2}{3}(x-b)^3} \; , \quad x \ge b \; , \quad b \in \mathbb{R} \; .$$
Extensión C^1 a una solución para $x \in \mathbb{R}$. ¡No unicidad de las soluciones y con $y(x_o) = 0$!
Lema (de unicidad): Si y es solución en $\mathbb{R}$ y $y(a) = 0$ para algún real a entonces $y(x) = 0$ para todo $x \le a$.
Consecuencia: Si ϕ es solución no identicamente nula de la EDO entonces hay b real tal que $\phi = \phi_b^{(+)}$ o bien $\phi = \phi_b^{(-)}$. Unicidad de la solución ϕ con $\phi(x_o) \neq 0$.

El problema de Cauchy para EDO de grado n.

22. *27/10* Ecuaciones de primer orden. Teorema de existencia y unicidad local para el problema de Cauchy. Los ejemplos discutidos a la luz de este teorema (hipótesis).

    Ecuaciones separables. Técnica de integración y Teorema de la Función implícita. Ejemplo: ecuación logística (discusión completa).
    Ecuaciones reducibles a separables.

    Ecuaciones exactas.

23. *27/10* Factores integrantes.

    Ecuaciones lineales (normales o regulares); caso homogeneo y caso inhomogeneo. Solución en términos de una primitiva del coeficiente; teorema de existencia y unicidad.

    EDOs reducibles a ec. lineales; ejemplo Ec. de Bernoulli. Generar soluciones a partir de otras; ejemplo ec. de Riccati.

    Solución iterativa del problema de Cauchy (para una EDO de primer orden). Equivalencia de $y' = f(x, y)$, $y(x_o) = y_o$ con la ecuación integral $y(x) = y_o + \int_{x_o}^{x} f(t, y(t))\, dt$. El operador T (¡hipótesis sobre f!)

    $$T(g)(x) = y_o + \int_{x_o}^{x} f(t, g(t))\, dt$$

    donde g es continua en un intervalo que contiene a x_o. Espacio vectorial real de funciones continuas definidas en un intervalo compacto I con valores reales en un intervalo cerrado J con la norma $\|g\| := \max\{|g(x)| : x \in I\}$. Si f es continua, T es continuo. Si $f(x, \cdot)$ satisface una condición de Lipschitz uniforme en $x \in I$ entonces $|T(g)(x) - T(h)(x)| \leq C|x - x_o|\,\|g - h\|$. Teorema: Si f satisface esa condición de Lipschitz entonces la EDO admite una única solución en I.

    Ecuaciones de segundo orden $y'' = f(x, y, y')$ o $F(x, y, y', y'') = 0$. Reducción a EDOs de primer orden cuando f o F no dependen de y via $u = y'$. Ejemplo.
    Reducción a EDOs de primer orden cuando f o F no dependen de la variable independiente x. Ejemplo (a ser continuado).

24. *3/11* Continuación del ejemplo $y\,y'' + (y')^2 = 0$.
    Método de cuadraturas para EDO de forma $y'' = f(y)$; con $F' = f$, $(y')^2/2 = F + c$ (ley de conservación de la "energía).

    Teorema de existencia y unicidad local para el problema de Cauchy de una EDO de segundo orden $y'' = f(x, y, y')$.

    Ecuaciones lineales $Py'' + Qy' + Ry = G$. Caso *normal* donde P no tiene ceros, $y'' + py' + qy = g$ con $g \equiv 0$ (homogenea) y $g(x) \neq 0$ para algún x. Teorema de existencia y unicidad para el problema de Cauchy. Formas canónicas $(py')' + qy = h$ y $w'' + rw = m$.

    El caso homogeneo. Wronskiano e independencia lineal; Teorema de Abel. Ejemplo: EDO lineal normal con coeficientes constantes $y'' + ay' + by = 0$; Ansatz exponencial y polinomio característico; discusión de un sistema de dos soluciones linealmente independientes en dependencia del signo de la discriminante $a^2 - 4b$.

Teorema de d'Alembert (Variación de constantes) para la construcción de una solución linealmente independiente a partir de una solución conocida.

Teoremas (de Sturm) para ceros de las soluciones: Si p, q son continuas entonces:

- Si $\phi_1(x_o) = \phi_2(x_o)$ para dos soluciones de la EDO normal lineal homogenea entonces ϕ_1 y ϕ_2 son linealmente dependientes.
- Los ceros de dos soluciones linealmente independientes se alternan.
- Si $y_1'' + r_1 y_1 = 0$ y $y_2'' + r_2 y_2 = 0$ en el mismo intervalo y $r_1(x) > r_2(x)$ en ese intervalo, donde y_2 no es identicamente nula, entonces entre dos ceros de y_2 hay un cero de y_1.

Introducción al caso lineal inhomogeneo.

25. *5/11* EDO lineal normal de segundo orden inhomogenea. Identificación de la estructura de la solución general como solución particular mas solución general de la ec. homogenea.
Teorema de d'Alembert (Construcción de una solución por "variación de constantes").

Problemas de autovalores para operadores lineales de segundo orden. Forma canónica $Lu = (pu')' + qu$ en intervalo $I \subset \mathbb{R}$ para u dos veces diferenciable. Problema de autovalores: $Lu = \lambda \rho u$ donde $\rho(x) > 0$ para $x \in I$. Para $I = [a, b]$, verificose que L es autoadjunto respecto del producto escalar

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) dx$$

si restringimos L al subespacio de funciones dos veces diferenciables que cumplen las condiciones de contorno (o borde):

$$\alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = 0 \ , \quad \beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0 \ . \tag{3}$$

Notación y terminología: autovalor, autofunción, etc. Problema de Sturm-Liouville. Resultados:

1) Las autofunciones u_λ, u_μ a autovalores λ y μ distintos son ρ-ortogonales:

$$\langle u_\lambda, u_\mu \rangle_\rho := \int_a^b \rho(x) u_\lambda(x) u_\mu(x) \, dx = 0 \ .$$

2) El autoespacio $\{u : \ Lu = \lambda \rho u \, , \ 3\}$ asociado a un autovalor λ es unidimensional; o sea los autovalores son simples.

3) Si p no cambia de signo en $[a, b]$ hay denumerablemente infinitos autovalores. Cuando $p(x) \geq 0$ y enumerando los autovalores $\{\lambda_n : \ n \in \mathbb{N}\}$ de menor a mayor $\lambda_n < \lambda_{n+1}$, se tiene $\lim_{n \to \infty} \lambda_n = \infty$ y la autofunción al n-ésimo autovalor tiene exactamente n ceros en el interior de (a, b). Además, normalizando las autofunciones $u_n := u_{\lambda_n}$ $(n \in \mathbb{N})$ estas constituyen una base ortonormal del espacio de las funciones continuas sobre $[a,b]$. Si f es dos veces diferenciable y satisface (3) entonces la serie

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle f, u_n\rangle_\rho u_n(x)$$

converge uniformemente.

Ejemplo: Series de Fourier. $I = [-\pi,\pi]$, $p(x) = -1$, $q(x) = 0$, $\rho(x) = 1$ de modo que $Lu = u''$ y con condición de borde (3) $u(-\pi) = u(\pi) = 0$. Autovalores son $\{\lambda_n = -n^2 : n = 1,2,3,\cdots\}$ con autofunción proporcional a $\sin(nx)$.

¿Que sucede con las EDO lineales de segundo orden no normales $Py''+Qy'+Ry = G$ si el coeficiente P tiene ceros? Si $P(x_o) = 0$ entonces en ese punto x_o la EDO cambia de orden.
Hay EDOs que admiten soluciones que se dejan expandir en series de potencias (positivas, negativas u otras). ¿Cuales son? La expansión en serie de potencias determina univocamente los coeficientes. El Ansatz de una serie de potencias para la solución de una EDO produce un sistema (infinito) de ecuaciones para los coeficientes. Solución recursiva.
Ejemplo: ec. dif. de Bessel $x^2y'' + xy' + (\lambda^2x^2 - \nu^2)y = 0$ con parámetros λ y ν. Hay problema con $x = 0$. Para $x > 0$ puede escribirse como problema de tipo Sturm-Liouville

$$(xy')' + \left(\lambda^2 x - \frac{\nu^2}{x}\right) y = 0 ,$$

si imponemos una condición de borde en $x = 0$.
Ejemplo: ec. dif. de Legendre $(1-x^2)y'' - 2xyy' + \nu(\nu+1)y = 0$ de parémetro ν. Hay problemas en $x = \pm 1$. Para $x \in (-1,1)$ se escribe como problema de Sturm-Liouville

$$[(1-x^2)y']' + \nu(\nu+1)y = 0 ,$$

si agregamos alguna condición de borde de tipo (3).

26. *10/11* Función de Green (inversión del op. lineal de segundo orden con condición de borde homogenea). Se busca resolver el problema

$$(pu')' + qu = g \ , \quad u(a) = u(b) = 0$$

en el intervalo (a,b) donde p,q y g son continuas sobre $[a,b]$ con p continuamente diferenciable y sin ceros en (a,b). $Lf := (pf')'$ para f dos veces continuamente diferenciable en (a,b). $\mathcal{K}$ denota el espacio vectorial de estas funciones f dos veces continuamente diferenciable en (a,b) que satisfacen la condición

$$f(a) = f(b) = 0 \ . \tag{4}$$

L aplica a $\mathcal{K}$ en las funciones continuas $\mathcal{C}$ sobre $[a,b]$.
Lema: Si la EDO homogenea $Ly = 0$ admite dos soluciones y_1, y_2 con

$$y_1(a) = y_2(b) = 0 \ , \quad y_1(b) \neq 0 \neq y_2(a) \tag{5}$$

entonces el operador $L : \mathcal{K} \to \mathcal{C}$ es inyectivo y suryectivo.
En tal caso si A denota el operador inverso ($A : \mathcal{C} \to \mathcal{K}$) se tiene la fórmula $u = Ag$ como solución del problema. Todo el conocimiento acumulado sobre las EDO lineales de segundo orden indica que

$$(Af)(x) = \int_a^b G(x,t)f(t)\,dt \ , \tag{6}$$

donde la función $G(\cdot,\cdot)$ de dos variables sobre $[a,b]\times[a,b]$ se denomina función de Green (del problema dado). La fórmula para la función de Green en términos de las soluciones especiales y_1, y_2 del Lema es:

$$G(x,t) = \frac{1}{p(t)W_{y_1,y_2}(t)} \begin{cases} y_2(x)y_1(t) & , \quad \text{si } a \le t \le x \\ y_1(x)y_2(t) & , \quad \text{si } x \le t \le b \end{cases} .$$

Comentarios:

1) G queda determinada a partir de la EDO homogenea y $u = Ag$ con (6) provee la solución cualquiera sea la función continua (inhomogeneidad) g.

2) Por el Teorema de Abel, $p(t)W_{y_1,y_2}(t)$ es una constante independiente de t.

3) G es simétrica bajo intercambio de las variables $G(x,t) = G(t,x)$.

4) G resulta ser la única solución del problema de determinar Φ sobre $[a,b]\times[a,b]$ de modo que:
(i) $(\partial/\partial x)(p(\partial\Phi/\partial x))(x,t) + q(x)\Phi(x,t) = 0$ para $x < t$ y $\Phi(a,t) = 0$;
(ii) $(\partial/\partial x)(p(\partial\Phi/\partial x))(x,t) + q(x)\Phi(x,t) = 0$ para $x > t$ y $\Phi(b,t) = 0$;
(iii) $\lim_{x\to t^+}(\partial\Phi/\partial x)(x,t) - \lim_{x\to t^-}(\partial\Phi/\partial x)(x,t) = 1/p(t)$.
En tal caso $G = \Phi$.

5) En el ámbito de la teoría de distribuciones G queda determinada por la ec.

$$(LG)(x,t) = \delta(x-t) \ , \quad G(a,t) = G(b,t) = 0 \ .$$

Discusión completa del ejemplo $u'' + k^2u = f$, $u(0) = u(\ell) = 0$.

27. *12/11* Soluciones en series (de EDOs lineales homogeneas). Si en la EDO lineal homogenea de orden n

$$y^{(n)} = a_{n-1}y^{(n-1)} + a_{n-2}y^{(n-2)} + \cdots + a_o y$$

las n funciones a_o,a_1, $\cdots$, a_{n-1}, son real-analíticas en un entorno de x_o, entonces toda solución es real-analítica en un entorno de x_o.
Ec. de segundo orden (lineales y homogeneas)

$$Py'' + Qy' + Ry = 0 \ ,$$

con P, Q, y R real-analíticas en un entorno de x_o donde $P(x_o) = 0$; x_o es punto singular de la ec. Se tiene $P(x) = (x-x_o)^m\alpha(x)$ en un entorno de x_o con $m \in \mathbb{N}$ y α real-analítica y $\alpha(x_o) \neq 0$. Dividiendo por α se obtiene la EDO lineal homogenea

$$(x-x_o)^m y'' + a_1 y' + a_o y = 0 \tag{7}$$

con a_o y a_1 real-analíticas en x_o.
Ejemplo: $x^3y'' + y = 0$ con punto singular $x_o = 0$, no admite soluciones de la forma $x^\nu \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ donde $\nu \in \mathbb{R}$ y la serie es convergente en algún entorno de 0.
Ejemplo (ec. de Euler): $x^2y'' + axy' + by = 0$ con $a, b \in \mathbb{R}$ tiene dos soluciones linealmente independientes para $x > 0$ clasificadas por las raices de la ec. cuadrática $\nu(\nu-1) + a\nu + b = 0$ que son:

1) Si $(1-a)^2 > 4b$, $y_1(x) = |x|^{\nu_+}$, $y_2(x) = |x|^{\nu_-}$ con $\nu_\pm = \frac{1-a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(1-a)^2 - 4b}$.

2) Si $(1-a)^2 < 4b$, $y_1(x) = x^{(1-a)/2}\cos(\sqrt{4b^2 - (1-a)^2}\ln(x))$,
$y_2(x) = x^{(1-a)/2}\sin(\sqrt{4b^2 - (1-a)^2}\ln(x))$.

3) Si $|1-a| = 2|b|$, $y_1(x) = |x|^{(1-a)/2}$, $y_2(x) = y_1(x)\ln(|x|)$.

Observar que la naturaleza de las soluciones de (7) dependen criticamente del valor del orden m del cero del coeficiente de la segunda derivada.

Un punto singular x_o de la EDO (7) se dice regular si $m = 2$ y x_o es un cero de a_1 de orden 1 o más. En otras palabras si la EDO (7) toma la forma

$$(x - x_o)^2 y''(x) + (x - x_o) q(x) y'(x) + r(x) y(x)$$

con q y r real-analíticas. Por medio de una traslación por x_o de la variable x podemos estandardizar a

$$x^2 y''(x) + x y'(x) + r(x) y = 0 \ . \tag{8}$$

En tal caso el Ansatz (Método de Frobenius)

$$y(x) = x^\nu \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$$

produce la relación

$$(n + \nu)(n + \nu - 1) a_n + \sum_{k=0}^{n} [(k + \nu) q_{n-k} + r_{n-k}] = 0 \ , \ n \in \mathbb{N} \tag{9}$$

donde q_k y r_k son respectivamente los coeficientes del desarrollo de Taylor de q respectivamente de r alrededor de $x_o = 0$. Para la mínima potencia x^0 se obtiene

$$a_o [\nu(\nu - 1) + \nu q(0) + r(0)] = 0 \ ;$$

si $a_o = 0$ deducimos sucesivamente que $a_1 = 0$, que $a_2 = 0$, etc. y obtenemos $a_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ de modo que $y \equiv 0$ que es por supuesto (linealidad) solución. En caso contrario $a_o \neq 0$ y ν debe ser raíz de

$$I(z) := z(z - 1) + z q(0) + r(0) \ . \tag{10}$$

Enumerando ν_1, ν_2 a las raices de modo que $Re(\nu_1) \geq Re(\nu_2)$ consideramos la raíz ν_1. De la condición (9) para $n = 1$ obtienese

$$a_1 = -\frac{\nu_1 q_1 + r_1}{I(1 + \nu_1)} a_o$$

ya que $I(1 + \nu_1) \neq 0$ pues $Re(1 + \nu_1) = 1 + Re(\nu_1) \geq 1 + Re(\nu_2) > Re(\nu_2)$ de modo que $1 + \nu_1 \neq \nu_2$ y, trivialmente $\nu_1 \neq 1 + \nu_1$. Procediendo con (9) para $n = 2, 3, \cdots$ se ve que $I(n + \nu_1) \neq 0$ y se obtiene una expresión para a_n como combinación lineal de a_0, a_1, $\cdots$, a_{n-1} que nos permite expresar a a_n como múltiplo de a_o. Se ve entonces que con los coeficientes así determinados

$$y_1(x) = |x|^{\nu_1} \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$$

es solución formal de (8). Si la serie infinita es convergente en un entorno de 0 entonces tenemos una solución. Repitiendo este procedimiento con la segunda raíz ν_2 planteando

$$y_2(x) = x^{\nu_2} \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n x^n$$

obtenemos de (9) para $n = 0$ la condición $b_o[I(\nu_2) = 0$ de modo que podemos tomar $b_o \neq 0$. Para $n = 1$ (9) nos produce

$$I(1 + \nu_2) a_1 + [\nu_2 q_1 + r_1] b_o = 0$$

de donde podemos determinar b_1 a partir de b_o si $I(1+\nu_2) \neq 0$ o sea si $1+\nu_2 \neq \nu_1$. Procediendo sucesivamente con (9) para $n = 2, 3, \cdots$, vemos que si $\nu_1 - \nu_2$ no es un número natural podemos establecer una fórmula recursiva para b_n en términos de b_o, $\cdots$, b_{n-1} que determina a b_n como un múltiplo de b_o. Esto conduce a una segunda solución y_2 que es linealmente independiente de y_1.
Cuando $\nu_1 - \nu_2 \in \mathbb{N}$, o sea $\nu_1 = \nu_2 + k$ con un natural k arbitrario entonces no podemos establecer una fórmula recursiva para los coeficientes b_n y debemos recurrir a la inspiración de la solución de la ec. de Euler para raices iguales para buscar una segunda solución. Se obtiene así el siguiente
Teorema (de Fuchs): Si la EDO

$$(x-x_o)^2 y''(x) + (x-x_o)q(x)y'(x) + r(x)y(x) = 0$$

donde x_o es un punto singular-regular tiene coeficientes q y r real-analíticas en x_o entonces hay dos soluciones linealmente independientes en $\{x \in \mathbb{R} : \ 0 < |x| < R\}$ donde R es el menor de los radios de convergencia de la expansión de Taylor de q y de r alrededor de x_o. Estas soluciones se clasifican según las raices ν_1 y ν_2 con $Re(\nu_1) \geq Re(\nu_2)$ de la ecuación indicial

$$I(z) = 0$$

donde I está definido por (10) de la siguiente manera:

1) Si $\nu_1 - \nu_2 \notin \mathbb{N}$

$$y_1(x) = |x-x_o|^{\nu_1} \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n (x-x_o)^n \ , \ \ y_2(x) = |x-x_o|^{\nu_2} \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n (x-x_o)^n \ ,$$

donde los coeficientes a_n respectivamente b_n se determinan recursivamente a partir de $a_o \neq 0$ respectivamente de $b_o \neq 0$ por medio de (9) con el valor de ν que corresponde (ν_1 para a_n respectivamente ν_2 para b_n).

2) Si $\nu_1 = \nu_2 + k$ con $k \in \mathbb{N}$,

$$y_1(x) = |x-x_o|^{\nu_1} \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n (x-x_o)^n \ ,$$

$$y_2(x) = \gamma y_1(x) \ln(|x|) + |x-x_o|^{\nu_2} \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n (x-x_o)^n \ ,$$

donde los coeficientes a_n se determinan recursivamente a partir de $a_o \neq 0$ por medio de (9) con $\nu = \nu_1$; y la constante γ asi como los coeficientes b_n se determinan recursivamente a partir de $b_o \neq 0$ via

$$I(n+\nu_2)b_n = -\sum_{j=0}^{n-1} [(j+\nu_2)q_{n-j} + r_{n-j}]b_j \ , \ \ 1 \leq n < k \ ;$$

$$I(n+\nu_2)b_n + \sum_{j=0}^{n-1} [(j+\nu_2)q_{n-j} + r_{n-j}]b_j$$

$$+2\gamma[n+\nu_2 - 1/2]a_{n-k} + \gamma \sum_{j=0}^{n-k} q_{n-k-j} a_j = 0 \ , \ \ \text{máx}\{k,1\} \leq n \ .$$

En ambos casos las series infinitas involucradas son convergentes en $(-R, R)$.

Ejemplo: Ec. diferencial de Bessel $x^2y'' + xy' + (x^2 - \zeta^2)y = 0$ con $\zeta \geq 0$. Expresiones explicitas para todo lo involucrado asi como para las funciones de Bessel de primera especie J_ζ, y de segunda especie $J_{-\zeta}$ con $2\zeta \notin \mathbb{N}$ y luego para $\zeta \notin \mathbb{N}$; la función de Bessel de segunda especie Y_n con $n \in \mathbb{N}$. Comentario, $0 < x \to J_\zeta(x)$ tiene denumerablemente infinitos ceros.