Facultad de Matemática, Astronomía y Física, U.N.C.

Métodos Matemáticos de la Física I – 2015

Guía 3, Problema 6

Si bien es posible y perfectamente lícito reducir la pregunta sobre las raices de las funciones trigonométricas complejas a aquella sobre las raices de productos de funciones trigonométricas y funciones hiperbólicas reales, hay un método genuinamente "complejo" y mucho más directo. Algunos ejemplos:

- Raices del coseno: $\cos(z) = 0$ si y sólo si $\exp(iz) + \exp(-iz) = 0$ si y sólo si (ya que $w \mapsto \exp(w)$ no se anula nunca)

  $$0 = \exp(iz)(\exp(iz) + \exp(-iz))$$

  si y sólo si $0 = \exp(iz)\exp(iz) + \exp(iz)\exp(-iz) = \exp(2iz) + 1$, si y sólo si $\exp(2iz) = -1$ si y sólo si $2iz \in \log(-1) = \{i\pi + i2n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$ si y sólo si $z = (2n+1)\pi/2$ con $n \in \mathbb{Z}$. En consecuencia las raices del coseno complejo son reales y las mismas que las del coseno real.

- Raices del seno: $\sin(z) = 0$ si y sólo si $\exp(iz) = \exp(-iz)$ si y sólo si $\exp(2iz) = 1$ si y sólo si $2iz \in \log(1) = \{i2n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$ si y sólo si $z = n\pi$ con $n \in \mathbb{Z}$. En consecuencia las raices del seno complejo son reales y las mismas que las del seno real.

- Raices del seno hiperbólico: $\sinh(z) = 0$ si y sólo si $\exp(z) = \exp(-z)$ si y sólo si $\exp(2z) = 1$ si y sólo si $2z \in \log(1) = \{i2n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$ si y sólo si $z = in\pi$ con $n \in \mathbb{Z}$. 0 es la única raiz real.

- Raices del coseno hiperbólico: $\cosh(z) = 0$ si y sólo si $\exp(z) = -\exp(-z)$ si y sólo si $\exp(2z) = -1$ si y sólo si $2z \in \log(-1) = \{i(2n+1)\pi : n \in \mathbb{Z}\}$ si y sólo si $z = i(2n+1)\pi/2$ con $n \in \mathbb{Z}$. No hay raices reales.