Métodos Matemáticos de la Física II

Solución[1] del Problema 4, Guía 2

El problema matemático es la ec. de difusión en $(0,\infty)\times(0,\infty)$ con fuente

$$u_t = ku_{xx} + q\delta_0(t)\delta_a(x) \tag{1}$$

donde $a > 0$; con condición de borde (de Neumann)

$$u_x(0,t) = 0\ ,\quad t > 0\ ; \tag{2}$$

y condición inicial

$$u(x,0) = 0\ . \tag{3}$$

Sobre la ecuación: el problema está formulado de manera algo ambigua. ¿Que quiere decir instantaneo?
En todo caso, la barra está aislada en su extremo $x = 0$. Por la ley de Fourier el flujo de calor a traves de una superficie es proporcional al gradiente en la dirección normal a la superficie. Si la barra está aislada en $x = 0$ el flujo de calor se anula allí y, en nuestro caso unidimensional, obtenemos la condición de borde (2).

La fuente que saca o pone energía en el sistema en forma de calor se modela con una función $Q(x,t)$, y se postula que el cambio de la temperatura en el tiempo multiplicado por la densidad (ρ) y el calor específico (c) es proporcional a $Q(x,t)$:

$$c\rho\, u_t(x,t) = Q(x,t)\ .$$

Si se quiere describir una situación altamente idealizada donde la fuente está muy localizada en espacio y tiempo –aquí en el punto $(a,0)$– se plantea

$$Q(x,t) = Q\delta_0(t)\delta_a(x)$$

donde

$$Q = \int_0^\infty dt \int_0^\infty dx Q(x,t) = Q\int_0^\infty \delta_0(t)dt \int_0^\infty \delta_a(x)dx\ .$$

La simplicidad se paga en la medida que la EDP se convierte en una ecuación para una distribución y no puede entenderse en el sentido clásico como una relación para los valores de una función y sus derivadas parciales evaluadas en puntos.

Solución por transformación de Laplace: Con

$$y(x,s) := \int_0^\infty e^{-st}u(x,t)dt\ ,\quad s > 0\ ,$$

(1) junto con (3) nos da formalmente

$$sy(x,s) = ky''(x,s) + q\delta_a(x)\int_0^\infty e^{-st}\delta_0(t)\,dt = ky''(x,s) + q\delta_a(x)\ .$$

La transformada de Laplace de δ_0 se calcula correctamente considerando la teoría de distribuciones. Acá baste el siguiente argumento; cualquiera sea $\epsilon > 0$, se tiene

$$\int_{-\epsilon}^\infty e^{-st}\delta_0(t)\,dt = 1$$

[1] G.A. Raggio

y tomando el límite $\epsilon \to 0^+$, $\mathcal{L}\delta_0 = 1$. La transformación de Laplace de la condición de borde (2) da

$$y'(0,s) = 0 \ , \quad s > 0 \ . \tag{4}$$

Para resolver la ODE para $y(\cdot, s)$ tenemos en cuenta que para $x \neq a$ tenemos

$$y''(x,s) = (s/k)y(x,s) \ , 0 < x \neq a$$

cuya solución general es

$$y(x,s) = \begin{cases} A(s)e^{\sqrt{s/k}\,x} + B(s)e^{-\sqrt{s/k}\,x} & , \quad 0 < x < a \\ C(s)e^{\sqrt{s/k}\,x} + D(s)e^{-\sqrt{s/k}\,x} & , \quad x > a \end{cases}$$

con funciones A, B, C y D de la variable s arbitarias. La condición (4) requiere que $A = B$ de modo que podemos reescribir (nuevas función A)

$$y(x,s) = \begin{cases} A(s)\cosh(\sqrt{s/k}\,x) & , \quad 0 < x < a \\ C(s)e^{\sqrt{s/k}\,x} + D(s)e^{-\sqrt{s/k}\,x} & , \quad x > a \end{cases} \ .$$

Imponemos que $x \mapsto y(x,s)$ sea continua para todo $s > 0$ lo que nos da una ecuación lineal para A, C, D. Antes de escribirla conviene quizás volver al problema original y analizarlo más detenidamente. La fuerte singularidad en el punto $(a, 0)$ no nos permite esperar que la solución buscada sea acotada en un entorno de ese punto. Pero es razonable esperar (o simplemente intentar) una solución que sea acotada para $x \to \infty$ y todo $t > 0$. O más aún, que se tenga $\lim_{x\to\infty} u(x,t) = 0$ para $t > 0$. En tal caso también esperamos que $x \to y(x,s)$ sea acotada para $x \to \infty$ o incluso que $\lim_{x\to\infty} y(x,s) = 0$ para $s > 0$. Imponiendo cualquiera de estas dos condiciones, vemos que $C = 0$ de modo que postulamos a

$$y(x,s) = \begin{cases} A(s)\cosh(\sqrt{s/k}\,x) & , \quad 0 < x < a \\ D(s)e^{-\sqrt{s/k}\,x} & , \quad x > a \end{cases} \tag{5}$$

como transformada de Laplace de la solución buscada. Esta función debe necesariamente tener alguna mácula en $x = a$ pues su segunda derivada produce una δ_a. Lo más económico es que $y(\cdot, s)$ sea continua en $x = a$ pero que la derivada no exista en ese punto. Integrando la ODE entre $a - \epsilon$ y $a + \epsilon$ con $\epsilon > 0$ lo suficientemente chico obtenemos

$$s\int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} y(x,s)\,dx = k\int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} y''(x,s)\,dx + q\int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} \delta_0(x)\,dx = k[y'(a+\epsilon,s) - y'(a-\epsilon,s)] + q \ ;$$

en el límite $\epsilon \to 0^+$ obtenemos

$$y'(a^+,s) - y'(a^-,s) = -q/k \tag{6}$$

como una condición necesaria para que se cumpla la ODE. Se verá luego que en el ambito de la teoría de distribuciones esta condición de discontinuidad para la derivada también es suficiente. Imponiendo entonces la condición de continuidad de y y la condición de discontinuidad sobre y' en (5) obtenemos

$$y(x,s) = \frac{q}{\sqrt{ks}} \begin{cases} e^{-\sqrt{s/k}\,a}\cosh(\sqrt{s/k}\,x) & , \quad 0 < x < a \\ \cosh(\sqrt{s/k}\,a)e^{-\sqrt{s/k}\,x} & , \quad x > a \end{cases} \ . \tag{7}$$

Para invertir la transformación de Laplace basta expandir el cosh y usar

$$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\lambda^2/4t} \quad \xrightarrow{\mathcal{L}} \quad e^{-\lambda\sqrt{s}}/\sqrt{s} \ , \quad \lambda > 0 \ ;$$

obteniendose asi

$$\boxed{u(x,t) = \frac{q}{\sqrt{4\pi kt}}\left(e^{-(x-a)^2/4kt} + e^{-(x+a)^2/4kt}\right)} \quad .$$

Se verifica directamente que $u_x(0,t) = 0$ para $t > 0$. El límite puntual para $t \to 0^+$ es

$$\lim_{t\to 0^+} u(x,t) = \begin{cases} \infty & , \quad \text{si } x = a \\ 0 & , \quad \text{si } x \neq a \end{cases} \quad ;$$

u no es acotada en cualquier entorno del punto $(a,0)$. La temperatura en $x = a$ no está definida para $t = 0$. En cambio

$$u(0,t) = \frac{q}{\sqrt{\pi kt}} e^{-a^2/4kt}$$

que muestra un máximo para $t = a^2/2k$. ¡La medición de la temperatura en el borde nos permite deducir la distancia a la fuente o, alternativamente, el valor de la constante k!