Métodos Matemáticos de la Física II

Solución[1] del Problema 6, Guía 2

Problema 6: Queremos hacer las condiciones de borde homogéneas, entonces sumamos a la solución $u(x,t)$ las funciones adecuadas

$$v(x,t) = u(x,t) - g(t) - x/L\,[h(t) - g(t)]\ ,$$

que cumple con

$$\begin{aligned} &v_t = k v_{xx} + \tilde{w}\ ,\ 0 < x < L\ ,\ t > 0\,; \\ &v(0,t) = 0\ ,\ v(L,t) = 0\ ,\ t > 0\ , \end{aligned}$$

donde $\tilde{w}(x,t) = w(x,t) - g'(t) - x/L\,[h'(t) - g'(t)]$.
Ahora podemos buscar una solución al mismo problema con condiciones iniciales $u(x,0) = f(x)$. En términos de nuestra solución con condiciones de borde homogéneas esto es

$$v(x,0) = \tilde{f}(x) = f(x) - g(0) - x/L\,[h(0) - g(0)]\ .$$

Por el método de separación de variables podemos llegar a una solución en serie de la forma

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(t)\beta_n(x)$$

Las funciones $\beta_n(x)$ deberían formar un conjunto completo en el intervalo $(0,L)$ y satisfacer las condiciones de contorno, luego podemos tomarlas como las autofunciones del siguiente problema

$$\begin{aligned} &\beta'' + \lambda\beta = 0 \\ &\beta(0) = \beta(L) = 0\,. \end{aligned}$$

Luego $\beta_n(x) = \sin(n\pi x/L)$ y obtenemos

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(t) \sin(n\pi x/L)\ ,$$

que debe satisfacer la ecuación diferencial, entonces

$$\alpha_n'(t) = -k(n\pi/L)^2 \alpha_n(t) + \tilde{w}_n(t)\ ,$$

donde $\tilde{w}_n(t)$ son los coeficientes de la expansión de $w(x,t)$ en términos de las funciones $\beta_n(x)$ (en nuestro caso, los coeficientes de Fourier).
Ahora es fácil integrar la ecuación para los $\alpha_n(t)$, obtenemos

$$\alpha_n(t) = \exp\left(-\frac{n^2\pi^2 k}{L^2} t\right) \left[\int_0^t \exp\left(\frac{n^2\pi^2 k}{L^2}\tau\right) \tilde{w}_n(\tau) d\tau + c_n\right]\ ,$$

y finalmente las constantes c_n están determinadas por las condiciones iniciales $v(x,0) = \tilde{f}(x)$ ya que $c_n = \alpha_n(0) = \tilde{f}_n$

[1] P. Perez-Piskunow