Métodos Matemáticos de la Física II

Solución[1] del Problema 7, Guía 2

Mr. Feynman no me contestó asi que resuelvo el problema por fuerza bruta.

Como la condición en la superficie es periódica (de período 2τ) en el tiempo y uniforme (temperatura constante) en cada instante, propongo una solución que sea periódica del mismo período y dependa solamente del radio r:

$$u(r,t) = \sum_{n\geq 0} \{\alpha_n(r)\cos(n\pi t/\tau) + \beta_n(r)\sin(n\pi t/\tau)\} \ .$$

Abrevio $\lambda_n := n\pi/\tau$ para $n \geq 1$ con lo cual $\lambda_n > 0$. Ahora la condición en la superficie $r = a$ es

$$\varphi(t) = u(a,t) = \sum_{n\geq 0} \{\alpha_n(a)\cos(\lambda_n t) + \beta_n(a)\sin(\lambda_n t)\} \ ; \tag{1}$$

lo que reconocemos como la serie de Fourier de la función 2τ-periódica φ (la que nos dieron o cualquier otra). Por lo tanto, como se sabe,

$$\alpha_0(a) = \frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{\tau} \varphi(t)dt \ , \tag{2}$$

$$\alpha_n(a) = \frac{1}{\tau}\int_{-\tau}^{\tau} \varphi(t)\cos(\lambda_n t)\,dt \ , \quad \beta_n(a) = \frac{1}{\tau}\int_{-\tau}^{\tau} \varphi(t)\sin(\lambda_n t)\,dt \ . \tag{3}$$

Además,

$$u_t = \sum_{n\geq 1} \{-\lambda_n\alpha_n(r)\sin(\lambda_n t) + \lambda_n\beta_n(r)\cos(\lambda_n t)\} \ .$$

La parte radial del Laplaciano es

$$(\partial^2/\partial r^2) + 2r^{-1}(\partial/\partial r) \ ;$$

de modo que

$$\Delta u = \alpha_o'' + 2r^{-1}\alpha_o' + \sum_{n\geq 1} + \sum_{n\geq 1} \left\{(\alpha_n'' + 2r^{-1}\alpha_n')\cos(\lambda_n t) + (\beta_n'' + 2r^{-1}\beta_n')\sin(\lambda_n t)\right\} \ .$$

De la unicidad de la expansión en serie de Fourier obtenemos

$$\alpha_o'' + 2r^{-1}\alpha_o' = 0 \ ;$$

$$\alpha_n'' + 2r^{-1}\alpha_n' = \frac{\lambda_n}{k}\beta_n \ , \quad n \geq 1 \ , \quad \beta_n'' + 2r^{-1}\beta_n' = -\frac{\lambda_n}{k}\alpha_n \ , \quad n \geq 1 \ .$$

La solución de la primera ODE es

$$\alpha_o(r) = c + d/r \ ,$$

que es singular en $r = 0$ salvo cuando $d = 0$. Rechazamos la singularidad y convenimos en que $\alpha_o(r) = \alpha_o = const.$[2]. La segunda linea para $n \geq 1$ es un sistema de 2 ODE para el par (α_n, β_n)[3]. Todos estos sistemas son estructuralmente idénticos; sólo cambia el valor de λ_n/k.

---

[1] G.A. Raggio

[2] En nuestro caso por (2) $\alpha_o = T_o/2$

[3] Esto es consecuencia de que la euación de difusión no admite soluciones reales en variables separadas que sean periódicas en el tiempo (salvo la solución constante).

Solución del sistema de 2 ODE: El sistema es[4]:

$$\alpha'' + 2r^{-1}\alpha = 2\omega^2\beta \ , \quad \beta'' + 2r^{-1}\beta = -2\omega^2\alpha$$

con $\omega > 0$. En forma matricial con

$$\boldsymbol{y} := \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \ ,$$

$$[(d^2/dr^2) + 2r^{-1}(d/dr)]\boldsymbol{y} = 2\omega^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} \ .$$

El siguiente truco (muy usado en mecánica cuántica) es útil: si busco $R(r)$ con $R'' + 2r^{-1}R' = G$ donde G es alguna función radial, entonces con $\xi(r) := rR(r)$ tengo

$$\xi'' = (R + rR')' = 2R' + rR'' = r(R'' + 2r^{-1}R) = rG \ .$$

Si definimos entonces

$$a(r) = r\alpha(r) \ , \quad b(r) := r\beta(r) \ , \quad \boldsymbol{z} = r\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \ ,$$

entonces

$$\boldsymbol{z}'' = 2\omega^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{z} \ . \tag{4}$$

La matriz que aparece es simétrica; sus autovalores son[5] $\pm i$ con correspondientes autovectores (normalizados)

$$\boldsymbol{e}_\pm = 2^{-1/2} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix}$$

De modo que la matriz

$$S = (2)^{-1/2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$$

–cuya determinate es $-i$– es invertible con inversa

$$S^{-1} = (2)^{-1/2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \ ,$$

y se tiene

$$S^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} S = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \ .$$

Por lo tanto, si definimos

$$\boldsymbol{\zeta} := S^{-1}\boldsymbol{z}$$

entonces

$$\boldsymbol{\zeta}'' = S^{-1}\boldsymbol{z}'' = 2\omega^2 \ S^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{z} = 2\omega^2 S^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} S\boldsymbol{\zeta} = 2\omega^2 \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \boldsymbol{\zeta}$$

y <u>hemos logrado desacoplar el sistema</u>:

$$(\zeta^{(1)})'' = i2\omega^2\zeta^{(1)} \ , \quad (\zeta^{(2)})'' = -i2\omega^2\zeta^{(2)} \ .$$

Esto se resuelve inmediatamente recordando que $\sqrt{i} = \pm(1+i)/\sqrt{2}$ y $\sqrt{-i} = \pm(1-i)/\sqrt{2}$:

$$\zeta^{(1)}(r) = \zeta_{1,+}e^{(1+i)\omega r} + \zeta_{1,-}e^{-(1+i)\omega r}$$

[4]El factor 2 se incluye por conveniencia.

[5]¡aparecieron los complejos! No se asuste y siga adelante.

con constantes arbitrarias $\zeta_{1,\pm}$; y una fórmula similar para $\zeta^{(2)}$ con el factor en la exponencial cambiado a $(1-i)\omega$. Al volver a las componentes a, b de $\boldsymbol{z}$ vemos que podemos expresar a estas componentes como combinaciones lineales de las cuatro funciones : $e^{(1+i)\omega r}$, $e^{-(1+i)\omega r}$, $e^{(1-i)\omega r}$, $e^{-(1-i)\omega r}$; o, alternativamente, como combinaciones lineales de las cuatro funciones: $\cosh(\omega r)\cos(\omega r)$, $\cosh(\omega r)\sin(\omega r)$, $\sinh(\omega r)\cos(\omega r)$, $\sinh(\omega r)\sin(\omega r)$. Si volvemos a las funciones α y β originales, vemos que ellas se expresan como combinaciones lineales de las cuatro funciones

$$\frac{\cosh(\omega r)\cos(\omega r)}{r} \ , \ \cosh(\omega r)\frac{\sin(\omega r)}{r} \ , \ \ \frac{\sinh(\omega r)}{r}\cos(\omega r) \ , \ \ \frac{\sinh(\omega r)\sin(\omega r)}{r} \ .$$

Recordando que

$$\cos(\mu r) \asymp 1 \ , \ \ \cosh(\mu r) \asymp 1 \ , \ \ \sin(\mu r) \asymp \mu r \ , \ \ \sinh(\mu r) \asymp \mu r \ , \ \ r \to 0 \ ,$$

y rechazando a la función $r \mapsto r^{-1}\cosh(\omega r)\cos(\omega r)$ por su singularidad en $r = 0$, obtenemos las siguientes expresiones

$$a(r) = a_1 \mathrm{shc}(\omega r) + a_2 \mathrm{shs}(\omega r) + a_3 \mathrm{chs}(\omega r) \ ,$$

$$b(r) = b_1 \mathrm{shc}(\omega r) + b_2 \mathrm{shs}(\omega r) + b_3 \mathrm{chs}(\omega r) \ ;$$

donde hemos introducido:

$$\mathrm{shc}(p) := \sinh(p)\cos(p) \ , \ \ \mathrm{shs}(p) := \sinh(p)\sin(p) \ , \ \ \mathrm{chs}(p) := \cosh(p)\sin(p) \ .$$

Las constantes a_1, b_1, a_2, b_2, a_3 y b_3 deben ser tales que se obtenga una solución del sistema (4). Insertando esto en el sistema de ODE, obtenemos la solución general y regular en el origen:

$$\alpha(r) = a\frac{\mathrm{shc}(\omega r)}{r} + b\frac{\mathrm{chs}(\omega r)}{r} \ , \ \ b(r) = b\frac{\mathrm{shc}(\omega r)}{r} - a\frac{\mathrm{chs}(\omega r)}{r} \ .$$

Podemos entonces volver a nuestro problema y obtener la siguiente expresión para u (con $\omega_n := \sqrt{\lambda_n/2k}$):

$$u(r,t) = \alpha_o + \sum_{n\geq 1} \cos(\lambda_n t)\left\{a_n\frac{\mathrm{shc}(\omega_n r)}{r} + b_n\frac{\mathrm{chs}(\omega_n r)}{r}\right\}$$

$$+ \sum_{n\geq 1} \sin(\lambda_n t)\left\{b_n\frac{\mathrm{shc}(\omega_n r)}{r} - a_n\frac{\mathrm{chs}(\omega_n r)}{r}\right\}$$

donde a_n, b_n son constantes a determinar.
Formalmente se tiene

$$u(0,t) = \alpha_o + \sum_{n\geq 1} \omega_n \left\{(a_n + b_n)\cos(\lambda_n t) + (b_n - a_n)\sin(\lambda_n t)\right\} \ .$$

La evaluación en $r = a$ (lamento que hay tantas “a”) y la comparación con (1) nos indican que

$$a_n \mathrm{shc}(\omega_n a) + b_n \mathrm{chs}(\omega_n a) = a\alpha_n(a) \ ,$$

$$b_n \mathrm{shc}(\omega_n a) - a_n \mathrm{chs}(\omega_n a) = a\beta_n(a) \ ,$$

que admite una única solución para (a_n, b_n) pues la determinante de los coeficientes de este sistema lineal para el par (a_n, b_n) es $a^{-2}(\mathrm{shc}(\omega_n a)^2 + \mathrm{chs}(\omega_n a)^2)$ lo que no es nulo.

Hasta ahora no hemos usado ninguna propiedad de la función de borde φ mas allá de la periodicidad y de la uniformidad (i.e. $t \mapsto \varphi(a,t)$ no depende de ángulos). Le dejo los detalles de los cálculos para la φ específica.