Métodos Matemáticos de la Física II

Solución[1] del Problema 5, Guía 3

Veamos primero esto del Laplaciano radial. Se tiene

$$r := \sqrt{\sum_{j=1}^{d} x_j^2} \; ;$$

de modo que

$$\frac{\partial}{\partial x_j} = \left(\frac{\partial r}{\partial x_j}\right) \frac{\partial}{\partial r} + \alpha_j = \frac{x_j}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \alpha_j$$

donde α_j denota una cierta función independiente de r y que no involucra derivadas parciales respecto de r (dependiente de variables angulares y derivadas parciales angulares). Entonces

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{x_j}{r} \frac{\partial}{\partial r}\right) + \alpha_j' = r^{-1}\frac{\partial}{\partial r} + x_j \frac{\partial r^{-1}}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{x_j}{r}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial r} + \alpha_j'$$

$$= r^{-1}\frac{\partial}{\partial r} - x_j r^{-2}\frac{\partial r}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{x_j}{r}\frac{x_j}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial}{\partial r} + \alpha_j'$$

$$= r^{-1}\frac{\partial}{\partial r} - x_j^2 r^{-3}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{x_j^2}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \alpha_j' \; ,$$

donde α_j' denota nuevamente un término que depende de los ángulos y derivadas parciales respecto de estos últimos. Luego

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} = nr^{-1}\frac{\partial}{\partial r} - \sum_{j=1}^{n} x_j^2 r^{-3}\frac{\partial}{\partial r} + \sum_{j=1}^{n}\frac{x_j^2}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial}{\partial r} + \sum_{j=1}^{n}\alpha_j'$$

$$= (n-1)r^{-1}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \text{términos angulares} \; .$$

Por lo tanto, si u depende exclusivamente de r, tenemos $\Delta u = u_{rr} + r^{-1}(n-1)u_r$.

Intentamos resolver $u_{tt} = c^2\Delta u$ con u radial (i.e. dependiente de r solamente) de forma

$$u(r,t) = \alpha(r) f(t - \beta(r)) \; .$$

Esto describe una función (radial) donde el perfil f se traslada temporalmente con una función (de “atraso / adelanto”) β y que es “atenuada / magnificada” con una función α. Calculamos

$$u_t(r,t) = \alpha(r) f'(t-\beta(r)) \; , \;\; u_t t(r,t) = \alpha(r) f''(t-\beta(r)) \; ;$$

$$u_r(r,t) = \alpha'(r) f(t-\beta(r)) - \alpha(r) f'(t-\beta(r))\beta'(r) \; ;$$

$$u_{rr}(r,t) = \alpha''(r) f(t-\beta(r)) - 2\alpha'(r) f'(t-\beta(r))\beta'(r)$$

$$+\alpha(r) f''(t-\beta(r))(\beta')(r)^2 - \alpha(r) f'(t-\beta(r))\beta''(r) \; .$$

La ec. de onda se satisface entonces si

$$\alpha(r)(1 - c^2(\beta'(r))^2 f''(t-\beta(r)) = 0 \; ;$$

$$(2\alpha'\beta' + \alpha\beta'' + r^{-1}(n-1)\alpha\beta') f'(t-\beta) = 0 \; ;$$

[1] G.A. Raggio

$$(\alpha''(r) + r^{-1}(n-1)\alpha'(r))f(t-\beta(r)) = 0\ .$$

Si f es arbitraria esto implica que o bien $\alpha \equiv 0$ que no nos interesa o bien $\alpha \neq 0$ pero en tal caso

$$(\beta')^2 = 1/c^2 \implies \beta' = \pm/c \implies \beta'' = 0\ ; \tag{1}$$

esto en la segunda realción nos da

$$2\alpha' + r^{-1}(n-1)\alpha = 0\ ,$$

de modo que

$$\alpha(r) = Cr^{-(n-1)/2}$$

con $C \neq 0$. Las derivadas que necesitamos son

$$\alpha'(r) = -C\frac{n-1}{2}r^{-(n+1)/2}\ ,\ \ \alpha''(r) = C\frac{(n-1)(n+1)}{4}r^{-(n+3)/2}\ ,$$

que insertadas en la tercera relación nos entregan

$$\frac{C}{4}r^{-(n+3)/2}(n-1)(3-n)f(t-\beta(r)) = 0\ ;$$

de modo que $n = 1$ o bien $n = 3$.
Retornando a (1) tenemos $\beta(r) = \pm r/c + const.$ y entonces en dimensión $n = 1$ o $n = 3$ hay estas ondas esféricas atenuadas que tienen la forma general

$$u_\pm(r,t) = \frac{1}{r^{(n-1)/2}}f(t \pm r/c)\ ,$$

donde hemos absorbido la constante libre que define a β en la función f. No hay atenuación en una sola dimensión.
Alternativamente, redefiniendo la función f adecuadamente, podemos escribir

$$u_\pm(r,t) = \frac{1}{r^{(n-1)/2}}f(r \pm ct)\ .$$

En la onda esférica u_- el perfil de onda se mueve hacia afuera a velocidad c; lo opuesto ocurre en u_+ con velocidad c.