Métodos Matemáticos de la Física II

Comentario [1] sobre el Problema 5, Guía 4

Recordamos las convenciones

$$S_r := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d : |\boldsymbol{x}| = r\} \ , \ \ B_r := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d : |\boldsymbol{x}| \leq r\} \ , \ r \geq 0 \ ,$$

son respectivamente la esfera de radio r y la bola de radio r en $\mathbb{R}^d$; $\partial B_r = S_r$.
Consideramos un campo escalar continuo ψ en $\mathbb{R}^d$. A este le asociamos un nuevo campo escalar en $\mathbb{R}^d$ con

$$\overline{\psi}(\boldsymbol{x}) := \frac{1}{|S_r|}\int_{S_r} \psi(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y} \ , \ \ r := |\boldsymbol{x}| > 0 \ ,$$

y $\overline{\psi}(\mathbf{0}) = \psi(\boldsymbol{x})$. Aquí $|S_r|$ denota el volumen $(d-1)$-dimensional de S_r que está dado por

$$|S_r| = \frac{2\pi^{d/2} r^{d-1}}{\Gamma(d/2)} \ .$$

El campo $\overline{\psi}$ es claramente radial y lo vemos como función de r con $0 \leq r$; claramente $\overline{\psi}$ es continua en $[0, \infty)$.
Observe que para $\boldsymbol{y} \in S_r$ se tiene $\boldsymbol{y} = r\widehat{\boldsymbol{y}}$ con $\widehat{\boldsymbol{y}} \in S_1$ luego como $d\boldsymbol{y} = r^{d-1} d\widehat{\boldsymbol{y}}$

$$\overline{\psi}(\boldsymbol{x}) := \frac{1}{|S_1|}\int_{S_1} \psi(r\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y} \ ,$$

Lema 1.

$$(\overline{\psi})\,' = \frac{1}{|S_r|}\int_{S_r} (\nabla\psi) \cdot \boldsymbol{n} \, d\boldsymbol{x} = \frac{1}{|S_r|}\int_{B_r} \Delta\psi \, d\boldsymbol{x} \ .$$

Demostración: Tenemos $\partial/\partial r = \sum_{j=1}^{d} (\partial x_j/\partial r)(\nabla)_j = \widehat{\boldsymbol{x}} \cdot (\nabla)$ de modo que

$$\frac{\partial \overline{\psi}}{\partial r}(r) = \frac{1}{|S_1|}\int_{S_1} \widehat{\boldsymbol{y}} \cdot (\nabla\psi)(r\boldsymbol{y}) \, d\boldsymbol{y} = \frac{1}{|S_1|}\int_{S_1} (\nabla\psi)(r\boldsymbol{y}) \cdot \boldsymbol{n} \, d\boldsymbol{y}$$

donde $\boldsymbol{n} = \widehat{\boldsymbol{y}}$ es la normal exterior a S_r en $\boldsymbol{y} = r\widehat{\boldsymbol{y}} \in S_r$. Luego,

$$\frac{\partial \overline{\psi}}{\partial r}(r) = \frac{1}{|S_r|}\int_{S_r} (\nabla\psi)(\boldsymbol{y}) \cdot \boldsymbol{n} \, d\boldsymbol{y}$$

y la afirmación es consecuencia del Teorema de Gauß. □

Con un campo escalar continuo ϕ sobre $\mathbb{R}^d$ asociamos el campo escalar continuo

$$J_\phi(\boldsymbol{x}) := \int_{B_r} \phi(\boldsymbol{y}) \, d\boldsymbol{y} = \int_0^r dp \left(\int_{S_p} \phi(\boldsymbol{y}) \, d\boldsymbol{y} \right) \ , \ \ r = |\boldsymbol{x}| > 0 \ ;$$

$J_\phi(\mathbf{0}) = \phi(\mathbf{0})$. Este campo es también puramente radial.

Lema 2. $J'_\phi = |S_r| \, \overline{\phi}$.

[1] G.A. Raggio

Demostración: Derivación de una integral. $\square$

Ahora, con el lema 2, y calculando la derivada de $|S_r|$

$$(\overline{\psi})'' = \frac{1}{|S_r|} J'_{\Delta\psi} - |S_r|^{-2} |S_1| (d-1) r^{d-2} J_{\Delta\psi} = \overline{\Delta\psi} - \frac{d-1}{r} \frac{1}{|S_r|} J_{\Delta\psi} \ ;$$

pero por el Lema 1, el segundo sumando es $[(1-d)/r](\overline{\psi})'$. De modo que

$$\overline{\Delta\psi} = (\overline{\psi})'' + \frac{d-1}{r} (\overline{\psi})' \ .$$

Ahora, como ya hemos observado muchas veces, el miembro derecho es igual a $\Delta\overline{\psi}$ de modo que hemos completado la demostración de:

Teorema 1. $\overline{\Delta\psi} = \Delta\overline{\psi}$.