Métodos Matemáticos de la Física II

Solución[1] del Problema 1, Guía 6

a)

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \alpha\frac{dy}{dx} = f(x),$$

con $f(x) = Ae^{-\beta x}$ para $x > 0$; $\alpha, \beta > 0$; $y(0) = \frac{dy}{dx}(0) = 0$.

Reemplazamos la inhomogeneidad f por la distribución δ_y con $y > 0$. Buscamos la función de Green $G(x,y)$ como solución (distribucional) de

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \alpha\frac{\partial G}{\partial x} = \delta_y \ , \quad 0 < x < \infty \ , \tag{1}$$

conservando la condición de borde $G(0,y) = (\partial G/\partial x)(0,y) = 0$. Entonces, para $x < y$ tenemos – $'$ denota derivada parcial respecto de la primera variable:

$$G'' + \alpha G' = 0 \ , \quad G(0,y) = G'(0,y) = 0 \ .$$

Como la solución en el intervalo $(0,y)$ es única necesariamente $G(x,y) = 0$ en ese intervalo. Mientras que para $x > y$

$$G'' + \alpha G' = 0 \ .$$

La solución general es $G'(x,y) = ce^{-\alpha x}$ con c que puede depender de y e integrando esto se obtiene $G(x,y) = ae^{-\alpha x} + b$ con a y b funciones de y. Resumiendo

$$G(x,y) = \begin{cases} 0 & , \quad \text{si } x < y \\ ae^{-\alpha x} + b & , \quad \text{si } x > y \end{cases} \ .$$

Imponemos que $0 < x \mapsto G(x,y)$ sea continua en $x = y$ y esto elimina una constante

$$G(x,y) = \begin{cases} 0 & , \quad \text{si } x < y \\ a(e^{-\alpha x} - e^{-\alpha y}) & , \quad \text{si } x > y \end{cases} \ ,$$

con $a = a(y)$. Observamos que si pedimos que $0 < x \mapsto (\partial G/\partial x)(x,y)$ sea continua en $x = y$ obtenemos que $a \equiv 0$. Por lo tanto, no podemos satisfacer la ec. diferencial (1) con una función que sea diferenciable en $x = y$. Pero, la G construida hasta este momento es infinitamente diferenciable en $(0,y)$ y en (y,∞). Si integramos a (1) en el intervalo $(y-\epsilon, y+\epsilon)$ con $\epsilon > 0$ pero tal que $y - \epsilon > 0$ obtenemos

$$G'(y+\epsilon,y) - G'(y-\epsilon,y) + \alpha[G(y+\epsilon,y) - G(y-\epsilon,y)] = \int_{y-\epsilon}^{y+\epsilon} \delta_y(t)\,dt = 1 \ ;$$

el segundo sumando tiende a 0 para $\epsilon \to 0$ asi que obtenemos la condición

$$\lim_{\epsilon\to 0}[G'(y+\epsilon,y) - G'(y-\epsilon,y)] = 1 \ .$$

Ya que

$$G'(x,y) = \begin{cases} 0 & , \quad \text{si } x < y \\ -\alpha ae^{-\alpha x} & , \quad \text{si } x > y \end{cases} \ ,$$

la condición es

$$-\alpha ae^{-\alpha y} = 1$$

[1] G.A. Raggio

o sea $a = -\alpha^{-1}e^{\alpha y}$. Ergo

$$G(x,y) = \begin{cases} 0 & , \quad \text{si } x < y \\ \alpha^{-1}(1 - e^{-\alpha(x-y)}) & , \quad \text{si } x > y \end{cases} .$$

A esta altura del partido podriamos verificar que usando la fórmula de derivación para distribuciones, $G(x,y)$ es realmente la solución de (1); lo dejamos para más adelante. Definamos

$$y(x) = \int_0^\infty G(x,t)f(t)\,dt \ , \quad x \geq 0 \ . \tag{2}$$

Entonces

$$y(x) = \alpha^{-1}\int_0^x (1 - e^{-\alpha(x-t)})f(t)\,dt \ ;$$

usando la fórmula de diferenciación para integrales;

$$y'(x) = \alpha^{-1}(1 - e^{-\alpha(x-x)})f(x) + \int_0^x e^{-\alpha(x-t)}f(t)\,dt = \int_0^x e^{-\alpha(x-t)}f(t)\,dt \ ,$$

y

$$y''(x) = f(x) - \alpha\int_0^x e^{-\alpha(x-t)}f(t)\,dt \ ;$$

por lo tanto

$$y'' + \alpha y' = f$$

y (2) es la solución de la EDO. Pero también, $y(0) = y'(0) = 0$ de modo que hemos encontrado la solución del problema.

Verificación directa: Con la función de Heaviside

$$H(t) := \begin{cases} 1 & , \quad \text{si } t > 0 \\ 0 & , \quad \text{si } t < 0 \end{cases}$$

para la cual hemos verificado que –entendiendola como distribución– se tiene $H' = \delta_0$, rescribimos

$$G(x,y) = g(x,y)H(x-y) \ , \quad g(x,y) = \alpha^{-1}(1 - e^{-\alpha(x-y)}) \ .$$

Observese que $g(y,y) = g(x,x) = 0$. Tenemos $g'(x,y) = e^{-\alpha(x-y)}$ y $g'' = -\alpha g'$. Notese que $g'(x,x) = g'(y,y) = 1$. Usamos la regla de derivación de distribuciones aplicado a la distribución gT definida por (vea el Problema 4a) de la guía 5)

$$(gT)(\varphi) = T(g\varphi) \ .$$

Entonces escribiendo $H_y(x) = H(x-y)$

$$(gH_y)' = g'H_y + g(H_y)' \ , \quad (gH_y)'' = g''H_y + 2g'(H_y)' + g(H_y)'' \ ;$$

luego

$$\begin{aligned}(gH_y)'' + \alpha(gH_y)' &= \underbrace{(g'' + \alpha g')}_{=0} H_y + \underbrace{(2g' + \alpha g)}_{=1+e^{-\alpha(x-y)}}(H_y)' + g(H_y)'' \\ &= (1 + e^{-\alpha(x-y)})(H_y)' + g(H_y)'' \ .\end{aligned}$$

Pero

$$(H_y)' = (H')_y = \delta_y \ , \quad (H_y)'' = (H'')_y = \delta'_y \ ;$$

de modo que

$$(1+e^{-\alpha(x-y)})(H_y)' = 2\delta_y \ ,$$

y

$$g(H_y)'' = g\delta_y' = (g\delta_y)' - g'\delta_y = (g\delta_y)' - \delta_y$$

pues $g'(y,y) = 1$. Ahora,

$$((g\delta_y)'(\varphi) = -(g\delta_y)(\varphi') = -\delta_y(g\varphi') = -g(y,y)\varphi'(y) = 0 \ ;$$

luego,

$$g(H_y)'' = -\delta_y \ .$$

Juntando todo esto

$$(gH_y)'' + \alpha(gH_y)' = \delta_y \ ;$$

lo que había que verificar.

b)

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{4}y = f(x),$$

con $f(x) = \sin(2x)$; $y(0) = y(\pi) = 0$.

Procedemos de la mismísima manera reemplazando la inhomogenidad f por δ_y con $0 < y < \pi$. Entonces la solución de

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{1}{4}G = \delta_y \ , \ \ 0 < x < \pi \ , \tag{3}$$

conservando la condición de borde $G(0,y) = G(\pi,y) = 0$, y con la condición ($'$ denota la derivada respecto de la primera variable)

$$G'(y^+,y) - G'(y^-,y) = 1$$

que se obtiene integrando (3) en el intervalo $[y-\epsilon, y+\epsilon]$ con $\epsilon > 0$ lo suficientemente chico y pasando al límite $\epsilon \to 0$, es:

$$G(x,y) = 2\begin{cases} \cos(y/2)\sin(x/2) & , \quad 0 \le x < y \\ \sin(y/2)\cos(x/2) & , \quad y < x \le \pi \end{cases} \ .$$

Entonces la diferenciación de la función

$$y(x) = \int_0^\pi G(x,t)f(t)\,dt = 2\cos(x/2)\int_0^x \sin(t/2)f(t)\,dt + 2\sin(x/2)\int_x^\pi \cos(t/2)f(t)\,dt$$

muestra que esta es efectivamente la solución de la ODE dada.
Por otro lado, usando la conocida relación trigonométrica $\sin(\alpha)\cos(\beta) = (\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta))/2$ y teniendo en cuenta que el seno es impar

$$G(x,y) = \sin((x+y)/2) - \sin(|x-y|/2) \ .$$

Ahora $|x| = x \ \ sgn(x)$ donde la función signo está definida por

$$sgn(x) := \begin{cases} 1 & , \quad \text{si } x > 0 \\ -1 & , \quad \text{si } x < 0 \end{cases} \ ;$$

y se tiene

$$sgn(x) = H(x) - H(-x) = 2H(x) - 1$$

donde H es la función de Heaviside. De modo que la derivada distribucional de sgn es, usando la regla de la cadena,

$$sgn'(x) = 2H'(x) = 2\delta_0(x) \ .$$

Usando esto tenemos

$$\frac{\partial |x-y|}{\partial x} = sgn(x-y) + 2(x-y)\delta_0(x-y) = sgn(x-y) \ .$$

Entonces

$$G'(x,y) = 2^{-1}\cos(x+y)/2) - 2^{-1}\cos(|x-y|/2) sgn(x-y) \ ,$$

$$\begin{aligned} G''(x,y) &= -4^{-1}\sin(x+y)/2) + 4^{-1}\sin(|x-y|/2)(sgn(x-y))^2 - \cos(|x-y|/2)\delta_y(x) \\ &= -4^{-1}\sin(x+y)/2) + 4^{-1}\sin(|x-y|/2) - \delta_y(x) = -G(x,y)/4 + \delta_y(x) \ ; \end{aligned}$$

lo que completa la verificación directa.