Métodos Matemáticos de la Física II

Guía 1 – 10 de marzo de 2015

Problema 1: Muestre que hay una única solución al problema

$$u_x = 3x^2y + y\ ,\quad u_y = x^3 + x\ ,\quad u(0,0) = 0\ .$$

Luego muestre que el problema

$$u_x = (3 - 10^{-82})x^2y + y\ ,\quad u_y = x^3 + x$$

no tiene ninguna solución.

Problema 2: Muestre que cada una de las siguientes ecuaciones admite una solución de la forma $u(x,y) = \exp\{ax + by\}$ con a, b constantes.

a) $u_x + 3u_y + u = 0$;

b) $u_{xx} + u_{yy} = 5e^{x-2y}$;

¿Que sucede si se cambian muy ligeramente los coeficientes a la izquierda en cada caso?

Problema 3: Sea p una función real diferenciable sobre los reales. Muestre que la ecuación

$$u_t = p(u)u_x\ ,\quad t > 0\ ,$$

tiene una solución de la forma $u(x,t) = f(x + p(u(x,t))t)$ donde f es real y diferenciable sobre los reales y cumple cierta condición. Use esto para determinar soluciones de las ecuaciones

a) $u_t = ku_x$, k constante;

b) $u_t = uu_x$;

c) $u_t = u\sin(u)u_x$.

¿Que condición puede agregarse para determinar a f?

Problema 4: Considere el problema (de Neumann para el Laplaciano)

$$\Delta u = f \text{ en } V \text{ con } \quad \boldsymbol{n}\cdot\nabla u = 0 \text{ en } \partial V\ ,$$

donde $V \subset \mathbb{R}^3$ con borde ∂V y $\boldsymbol{n}$ es el vector unitario normal a ∂V que apunta hacia afuera de V. Razone que la solución no es única. Use el Teorema de la Divergencia para establecer que

$$\int_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = 0$$

es condición necesaria para la solubilidad del problema.

Problema 5: Considere la temperatura en una esfera sólida y suponga que esta es función del radio (r) y del tiempo (t) solamente. Muestre que la ecuación del calor es entonces

$$\phi_t = a^2(\phi_{rr} + 2r^{-1}\phi_r)\ .$$

Discuta una transformación de tipo $\phi = r^\alpha\psi$ para reducir esta ecuación a la ecuación del calor usual.
Considere un cilindro recto y suponga que la temperatura es una función axial y del tiempo. ¿Que forma toma la ecuación del calor ? ¿ Que ocurre cuando se realiza la transformación $\xi = \ln(\text{coordenada axial})$?