

Métodos Matemáticos de la Física II

Guía 3 – 06 de abril de 2015

Problema 1:

Resolver el problema de las oscilaciones transversales propias de una cuerda homogénea de longitud L si:

- Los extremos de la cuerda están fijos rígidamente.
- los extremos de la cuerda están libres. Es decir $\frac{du}{dx} = 0$ en los extremos de la cuerda. Esto tiene lugar cuando los extremos de la cuerda están sujetos mediante anillos (de masas despreciables), que se deslizan sin rozamiento sobre barras paralelas.
- Uno de los extremos está libre y el otro fijo.

Problema 2: Resolver la ecuación $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ con las siguientes condiciones:

- $u(x, 0) = 0$ y $u_t(x, 0) = \sin x$
- $u(x, 0) = e^x$ y $u_t(x, 0) = \cos x$

Problema 3: Encontrar las 3 frecuencias de oscilación más bajas de un parche de tambor en forma de triángulo isósceles recto de lados a , a y $a\sqrt{2}$.

Problema 4: En los instrumentos musicales de cuerda percutida (por ejemplo, el piano) las oscilaciones transversales de la cuerda tensa se generan mediante un golpe, que le da a la cuerda una velocidad inicial sin desviación inicial. Si el martillo percutor es plano, rígido y tiene un ancho 2δ , el perfil de velocidad inicial de la cuerda estará dado por:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t = 0) = \begin{cases} v_0 & \text{si } |x - x_0| < \delta \\ 0 & \text{si } |x - x_0| > \delta, \end{cases} \quad (1)$$

asumiendo que el martillo golpea a una distancia x_0 del extremo de la cuerda y que esta tiene un largo L .

- Determine las oscilaciones de la cuerda $u(x, t)$ para todo $t > 0$, asumiendo que $u_{tt} = c^2 u_{xx}$.
- Para la energía de la cuerda oscilando se tiene la expresión

$$E = \frac{1}{2} \int_0^L \rho (c^2 u_x^2 + u_t^2) dx,$$

donde la densidad $\rho = M/L$, si M es la masa de la cuerda. Calcule la energía asociada con cada modo de oscilación o armónico.

- Determine en qué puntos de la cuerda x_0 la percusión **no** excita el m -ésimo modo de oscilación.
- Bajo la razonable aproximación $\delta \ll L$ determine cuál es el armónico que más resuena (es decir que posee mayor energía) si se percute la cuerda a una distancia x_0 de uno de sus extremos.

Problema 5: Considere la ecuación de ondas en n dimensiones espaciales para una onda esférica $u(r, t)$

$$u_{tt} = c^2 \left(u_{rr} + \frac{n-1}{r} u_r \right),$$

donde r es la coordenada radial ($(\partial^2/\partial r^2) + [(n-1)/r]\partial/\partial r$ es la componente radial del Laplaciano en \mathbb{R}^n).

Intente obtener soluciones

$$u(r, t) = \alpha(r)f(t - \beta(r))$$

que describen ondas esféricas cuya forma f arbitraria se propaga sin distorsión $f(t - \beta(r))$ con función de “atraso” β pero que están atenuadas (por α). Muestre que esto es posible solamente en dimensiones espaciales 1 o 3. Muestre que en el caso unidimensional no hay atenuación.

Problema 6: Verifique que la ecuación de ondas tiene las siguientes propiedades:

- a) La traslación espacial de una solución es solución.
- b) Cualquiera derivada parcial de una solución es solución.
- c) La dilatación $(D_\lambda u)(\mathbf{x}, t) := u(\lambda^{-1}\mathbf{x}, t/\lambda)$ de una solución u es solución.
- d) La “rotación” espacial $(T_R u)(\mathbf{x}, t) := u(R^{-1}\mathbf{x}, t)$ de una solución u es una solución para toda transformación lineal y ortogonal $R : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ cuya determinante es 1.