Métodos Matemáticos de la Física II

Guía 4 – 28 de abril de 2015

Problema 1: Determine las armónicas radiales no constantes en d dimensiones. Es decir, considere la ecuación de Laplace en d dimensiones espaciales, $\Delta u = 0$, para una función $u(r)$.

Problema 2: Un cilíndro sólido semi-infinito de radio a mantiene su superficie curva a $0°C$ y su base a una temperatura de T_0. Encuentre la distribución de temperatura en el cilindro en el estado estacionario.

Problema 3: Encuentre aquella solución de la ecuación de Laplace en el interior del disco unitario de radio $r = 1$ que tenga valores en la frontera dados por

$$f(\phi) = \begin{cases} V_0 & 0 < \phi < \pi \\ 0, & \pi < \phi < 2\pi \end{cases}$$

donde V_0 es una constante.

Problema 4: Considere el problema de valores iniciales para la solución u de la ecuación de ondas en 3 dimensiones espaciales (c =1) con $u_t(\boldsymbol{x}, 0) = 0$ y

$$u(\boldsymbol{x}, 0) = \begin{cases} 1 & , \text{ si } |\boldsymbol{x}| \leq 1 \\ 0 & , \text{ si } |\boldsymbol{x}| \geq 1 \end{cases}$$

Muestre que u depende de solamente de $|\boldsymbol{x}|$ y grafique el perfil radial para tiempos típicos. Por ejemplo: $t = 0$, 1/10, 2/10, 1/2, 1, 11/10, 3/2, 2, 3. ¿Cómo se comporta el perfil asintóticamente para $t \to 0$?

Problema 5: Para un campo escalar ψ definido en $\mathbb{R}^d$ sea

$$\overline{\psi}(r) := \frac{1}{|S_r|} \int_{S_r} \psi(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}, \quad r > 0,$$

el promedio de ψ en la esfera de radio $r > 0$ alrededor de $\mathbf{0}$. Aquí $|S_r|$ es el volumen ($(d-1)$-dimensional) de la esfera de radio $r > 0$ dada por

$$|S_r| = \frac{2\pi^{d/2} r^{d-1}}{\Gamma(d/2)}.$$

Verifique que $\overline{\psi}(0) := \lim_{r \to 0} \overline{\psi}(r) = \psi(\mathbf{0})$.
Verifique que

$$\frac{d\overline{\psi}}{dr} = \frac{1}{|S_r|} \int_{S_r} (\nabla \psi) \cdot \boldsymbol{n} \, d\boldsymbol{x} = \frac{1}{|S_r|} \int_{B_r} \Delta \psi \, d\boldsymbol{x},$$

donde $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{x}/|\boldsymbol{x}|$ es la normal exterior a S_1 en $\boldsymbol{x} \in S_1$ y $B_r = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d : |\boldsymbol{x}| \leq r\}$ es la bola de radio r alrededor de $\mathbf{0}$.
Muestre que $\Delta \overline{\psi} = \overline{\Delta \psi}$ para $d = 1, 2, 3$. ¿Puede demostrar esto en dimensión d arbitraria?

Hint: Determine $\frac{d^2 \overline{\psi}}{dr^2}$.