# Métodos Matemáticos de la Física II

Guía 5 – 14 de Mayo de 2015

**Problema 1:** Suponga que el campo escalar $\phi$ es dos veces continuamente diferenciable en $\mathbb{R}^3$ y se anula fuera de una bola. Usando la segunda identidad de Green y una bola de radio chico alrededor de un punto $\boldsymbol{x}$ arbitrario, muestre que

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \frac{-1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\Delta\phi(\boldsymbol{y})}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\, d\boldsymbol{y} \; .$$

**Problema 2:** En clase se comentó como ejemplo que la distribución

$$\phi \;\mapsto\; \int_{S_a} \phi(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}$$

que se obtiene integrando a la función de prueba $\phi$ sobre la esfera $S_a := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d : |\boldsymbol{x}| = a\}$ de radio $a > 0$ puede escribirse como $\delta_a(|\boldsymbol{x}|)$ en el sentido de que

$$\int_{\mathbb{R}^d} \phi(\boldsymbol{x})\delta_a(|\boldsymbol{x}|)\, d\boldsymbol{x} = \int_{S_a} \phi(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} \; .$$

Analice el límite $a \to 0^+$ en el sentido de distribuciones de $a^{-2}\delta_a(|\boldsymbol{x}|)$.

**Problema 3:** Complete los detalles del siguiente ejemplo discutido en clase. Sea $\rho$ una función definida en $\mathbb{R}^d$ que es no-negativa, se anula fuera de la bola $B_1(\mathbf{0})$, y cumple

$$\int_{B_1(\mathbf{0})} \rho(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} = 1 \; .$$

Definiendo $\rho_\epsilon[\boldsymbol{y}]$ para $\epsilon > 0$ y $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d$ por

$$\rho_\epsilon[\boldsymbol{y}](\boldsymbol{x}) := \epsilon^{-d}\rho\left(\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}}{\epsilon}\right) \;,\;\; \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \;;$$

muestre que para funciones de prueba $\varphi$ se tiene

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\epsilon[\boldsymbol{y}](\boldsymbol{x})\phi(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} = \varphi(\boldsymbol{y}) \; .$$

**Problema 4:** Consideramos distribuciones sobre $\mathbb{R}^d$. Si $T \in \mathcal{D}'$ y $\varphi \in \mathcal{D}$ escribimos $T(\varphi)$ para el valor de la distribución $T$ en la función de prueba $\varphi$. Si $f$ definida en $\mathbb{R}^d$ es una función integrable en todo compacto, escribimos

$$T_f(\varphi) := \int_{\mathbb{R}^d} f(\boldsymbol{x})\varphi(\boldsymbol{x}) \;,\;\; \varphi \in \mathcal{D} \; .$$

**a)** Cuando $g$ es una función sobre $\mathbb{R}^d$ con derivadas de todo orden ¿puede usted darle sentido al producto $gT$ como distribución de modo que $gT_f = T_{fg}$? Determine la derivadas distribucionales del producto $gT$.

**b)** Sea $\tau$ una transformación invertible de $\mathbb{R}^d$ en $\mathbb{R}^d$. ¿Puede Usted definir una transformación de distribuciones $S_\tau(T)$? Use la relación $S_\tau(T_f) = T_{f\circ\tau^{-1}}$ para inspirarse.

**c)** Observe (tomelo por cierto) que la convolución de dos funciones de prueba $\psi$, $\phi$

$$(\psi \star \phi)((\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} \psi(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})\phi(\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y}$$

es una función de prueba. Defina la convolución de una función de prueba $\phi$ con una distribución $T$ por

$$(\phi \star T)(\psi) := T((R\phi) \star \psi) \ ,$$

donde $(R\phi)(\boldsymbol{x}) = \phi(-\boldsymbol{x})$. Calcule $\phi \star \delta_{\boldsymbol{a}}$ y verifique que $\phi \star \delta_{\boldsymbol{0}} = T_\phi$.

**Problema 5:** Sea $\boldsymbol{M}$ un campo vectorial en $\mathbb{R}^d$ que es continuamente diferenciable en una bola abierta de radio $R$ y que se anula fuera de la bola cerrada $B_R$. Es posible ver a $\boldsymbol{M}$ como un campo vectorial valuado a distribuciones mediante la relación

$$T_{\boldsymbol{M}} = (T_{M_1}, T_{M_2}, \cdots, T_{M_d})$$

Donde $f \mapsto T_f$ es el mapa usual de funciones integrables a distribuciones. Si definimos la divergencia distribucional como

$$\nabla \cdot T_{\boldsymbol{M}}(\varphi) = \sum_{j=1}^{d} \partial_j T_{M_j}(\varphi) = \sum_{j=1}^{d} -T_{M_j}(\partial_j \varphi)$$

donde $\varphi$ es una función de prueba arbitraria, encuentre la divergencia distribucional de $\vec{M}$, y vea que

$$\nabla \cdot T_{\boldsymbol{M}}(\varphi) \neq T_{\nabla \cdot \boldsymbol{M}}(\varphi) \ ;$$

(estas distribuciones difieren en una distribución con soporte en el borde $S_R$ de $B_R$ que no necesariamente se anula si $\boldsymbol{M}$ es discontinua).

Ayuda: considere la bola $B_{R-\epsilon}$ donde $0 < \epsilon < R$ y use el Teorema de Gauß.