Métodos Matemáticos de la Física II

Guía 6 – 21 de mayo de 2015

Problema 1: Encuentre las funciones de Green y resuelva la siguiente ecuaciones:

a)

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \alpha\frac{dy}{dx} = f(x),$$

con $f(x) = Ae^{-\beta x}$ para $x > 0$; $\alpha, \beta > 0$; $y(0) = \frac{dy}{dx}(0) = 0$.

b)

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{4}y = f(x),$$

con $f(x) = \sin(2x)$; $y(0) = y(\pi) = 0$.

Problema 2: En la discusión de funciones de Green para la ec. de ondas en 3 dimensiones espaciales se afirmo que:

a) $G(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{y}, s) = \frac{1}{4\pi c^2 r}\delta(t - s - |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|/c)$ es la función de Green del problema

$$\Gamma_{tt} - c^2\Delta\Gamma = \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})\delta(t - s)\ ,\ \ \Gamma = \Gamma_t = 0\ ,\ t < s\ .$$

b) $R(\boldsymbol{x}, t) = \frac{1}{2\pi c}\delta(c^2(t - s)^2 - |\boldsymbol{x}|^2)sgn(t)$ (llamada función de Riemann) es la función de Green del problema

$$\Gamma_{tt} - c^2\Delta\Gamma = 0\ ,\ \ \Gamma(\boldsymbol{x}, 0) = 0\ ,\ \Gamma_t(\boldsymbol{x}, 0) = \delta(\boldsymbol{x})\ . \tag{1}$$

Usando el problema 2 de la guía 5 verifique estas afirmaciones. Luego, discuta cuál es la EDP que satisface la función

$$u(\boldsymbol{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} G(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{y}, 0)\psi(\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y}$$

en el caso a) y la función

$$w(\boldsymbol{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} R(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, 0)\psi(\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y}$$

en el caso b). Suponga que ψ es una función de prueba.

Problema 3: Determine la solución distribucional de (1) en 2 dimensiones espaciales.

Problema 4: Resuelva el problema de autovalores del Laplaciano en el disco plano de radio 1 con condición de Neumann en el borde.

Problema 5: Suponga conocidos los autovalores $\{\lambda_n : n = 1, 2, \cdots\}$ y autofunciones $\{h_n : n = 1, 2, \cdots\}$ de $-\Delta$ en un abierto acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ de borde (suave). Use estos datos para resolver el problema de Cauchy (dato inicial) para la ecuación de difusión en Ω.