Métodos Matemáticos de la Física II

Guía 7 – 18 de junio de 2015

Problema 1: Muestre que dos eventos mutuamente excluyentes no son necesariamente independientes y viceversa.

Problema 2: La temperatura mínima diaria durante el invierno, en cierta localidad, sigue aproximadamente una distribución normal de media $\mu = 9°C$ y varianza $\sigma = 3°C$.

a) Calcule la frecuencia con que ocurren heladas.

b) Si la media disminuye $1°C$, calcule la nueva frecuencia de heladas.

c) Idem si la media queda igual, pero la varianza aumenta $1°C$.

d) Encuentre la relación entre μ y σ que mantiene la frecuencia de heladas igual a una dada constante.

Problema 3: Una máquina que fabrica bobinas de papel de $1000m$ produce, en promedio, un defecto cada $10000m$. Halle la proporción de bobinas con defectos.

Problema 4: Muestre que es posible que tres eventos sean independientes dos a dos, pero no de a tres.

Problema 5: Dos partículas se ubican al azar, uniforme e independientemente, sobre una circunferencia de radio unidad. Halle la probabilidad de que su separación angular sea menor a un cuarto de vuelta.

Problema 6: Dos patículas se ubican al azar, uniforme e independientemente, dentro de:

a) un segmento de largo unidad;

b) un cuadrado de lado unidad;

c) un cubo de lado unidad.

Halle su distancia media.

Problema 7: Las coordenadas x e y de un punto tienen una densidad de probabilidad conjunta uniforme sobre la circunferencia unidad, es decir que en coordenadas polares planas se tiene:

$$\rho(r, \theta) = \frac{1}{2\pi}\delta(r - 1).$$

a) Cacule el coeficiente de correlación entre x e y.

b) Discuta si x e y son independientes.

Problema 8: La posición de un punto tiene una densidad de probabilidad uniforme sobre **(a)** una circunferencia de radio unidad centrada en el origen; **(b)** una cáscara esférica de radio unidad centrada en el origen.
Calcule la densidad de probabilidad para cada una de sus coordenadas cartesianas.

Problema 9: La posición de un punto en el espacio cartesiano de dimensión n tiene una densidad de probabilidad isotrópica alrededor del origen.

a) Muestre que si las coordenadas deben ser independientes, la densidad de cada una debe ser normal, de media nula e igual a la varianza.

b) En ese caso, halle la densidad de probabilidad para la distancia al origen.

Problema 10: Desde una superficie plana y horizontal, se dispara un proyectil con velocidad inicial dada y ángulo de elevación elegido al azar (uniformemente). Calcule la densidad de probabilidad para el alcance.

Problema 11: (Opcional): Un regador de jardín consiste de un hemisferio (de radio despreciable) con orificios por los que el agua sale a igual velocidad y normalmente a la superficie. Determine la densidad de orificios necesaria para que el regador riegue uniformemente un área circular.

Problema 12: Una dada enfermedad tiene una incidencia del 1% entre la población. Se dispone de un test que dá positivo siempre que una persona tiene la enfermedad, pero en un 1% de los casos también dá positivo para una persona sana (falsos positivos).

a) Calcule el poder predictivo del test, definido como la probabilidad de que una persona tenga la enfermedad dado que el test dió positivo.

b) Estudie el poder predictivo del test como función de la incidencia x de la enfermedad y la proporción y de falsos positivos, y concluya en qué casos el test es útil y en qué casos no.

c) **(Opcional)** Repita el punto anterior para un test que además tenga una proporción $z \neq 0$ de *falsos negativos* (casos en que el test da negativo para una persona enferma), definiendo ahora el poder predictivo como la probabilidad de que el resultado del test sea correcto (es decir, la probabilidad de que una persona esté sana dado un resultado negativo, o esté enferma dado un resultado positivo).

Problema 13: Un cojunto de $N = 125$ votantes realizan una elección donde deben votar por el "sí" o el "no" a una dada propuesta, sin abstenciones ni votos en blanco.

a) Si cada votante tiene igual probabilidad $p = 0.5$ de votar a favor y $q = 0.5$ de votar en contra de la propuesta, calcule la probabilidad de que la elección sea decidida por un solo voto (es decir, calcule la probabilidad de obtener una elección "casi empatada", tal que si un único voto se invierte, el resultado se invierta).

b) Idem al punto anterior si $p = 0.6$ y $q = 0.4$.

c) **(Opcional)** Considere ahora una elección indirecta, donde los $N = 125$ votantes se dividen en $M = 5$ distritos de $L = 25$ votantes cada uno. Cada distrito elige un "elector" con mandato de votar por la propuesta mayoritaria en su distrito, y los electores conforman un "colegio electoral" que decide el "si" o "no" a la propuesta por mayoría simple. Repita los calculos de los dos puntos anteriores para esta situación.

Problema 14: Una sociedad muy tradicionalista, con marcada preferencia por los hijos varones, practica un particular método de control de natalidad: cada mujer continúa teniendo hijos mientras dé a luz varones, pero si tiene una niña deja de tener hijos (los partos múltiples son muy raros en esta sociedad, y podemos despreciarlos). Calcule la proporción entre varones y mujeres en la población resultante.

Problema 15: Un jugador apuesta a "cara o cruz" contra una "banca". En cada jugada el jugador arroja una moneda; si obtiene "cara" gana una monenda, y si obtiene "cruz" pierde una. El jugador comienza con un "capital" de $n_0 > 0$ monedas; la banca, por otro lado, posee un capital inagotable.

a) Suponga que el jugador puede "endeudarse" con la banca, es decir, considere admisibles valores negativos del capital del jugador. Calcule la distribución de probabilidad para la variable aleatoria $n(l)$, el capital del jugador después de l tiradas. Discuta qué ocurre para $l >> 1$.

b) **Opcional** Considere ahora que el jugador "quiebra" (y el juego termina) cuando se queda sin monedas, es decir cuando $n(l) = 0$. Calcule la probabilidad de que el jugador no haya quebrado antes de l tiradas.

Problema 16: Considere una variable aleatoria Y con una densidad de probabilidad normal de media μ y varianza σ. Se toma una "muestra" de tamaño N de esta "población", que consiste entonces en N variables aleatorias *independientes* Y_i, $i = 1, ..., N$ todas con la misma densidad. A partir de ellas se construyen "estimadores" para la media y la varianza, respectivamente, en la forma:

$$\bar{Y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_i, \qquad S^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(Y_i - \bar{Y})^2,$$

que son obviamente también variables aleatorias. Ahora, un "buen" estimador debe ser *insesgado*, es decir su esperanza debe ser *igual* a la del parámetro que estima. Determine si estos estimadores son insesgados y, en caso de no serlo, cómo hay que modificarlos para que lo sean.

Problema 17: (Opcional): Es casi tradicional en los análisis estadísticos realizados en muchos relevamientos, considerar que dos variables presentan una correlación significativa si la probabilidad *a priori* de la correlación observada es menor al 5%, bajo la hipótesis de que las variables sean independientes. Suponga que se realiza un relevamiento epidemiológico de la incidencia de $M = 100$ condiciones clínicas en una dada población, tomando una muestra de tamaño $N = 10000$; para cada individuo $i = 1, ..., N$ en la muestra, la presencia de la condición $j = 1, ..., M$ será entonces una variable aleatoria Y_{ij} con valor 0 o 1. Suponga que las 100 condiciones clínicas son en realidad todas independientes, con iguales probabilidades $p \in [0, 1]$ de aparecer. Construya estimadores para los coeficientes de correlación lineales entre cada par de variables, y estime el número de correlaciones que este estudio identificará como "estadísticamente significativas".