restart:

Defino u(x, t) como la solución dada por Fourier al problema

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = k\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)$$
$$u(x,0) = \alpha$$
$$u(0,t) = u(L,t) = 0$$

Notar que esto equivale a decir que tomamos una barra con conductividad térmica k que se encontraba inicialmente a temperatura α y le conectamos en los extremos reservorios de calor a temeperatura 0° C (agua con hielo)
Esperamos que la temperatura u(x, t) tienda a ser uniforme e igual a cero en $t \to \infty$.

$$u := (x,t) \to 4\cdot\left(\frac{\text{alpha}}{\text{Pi}}\right)\cdot sum\left(\left(\frac{\exp\left(\frac{-(2\cdot n+1)^2\cdot\pi^2\cdot k\cdot t}{L^2}\right)\cdot\sin\left(\frac{(2\cdot n+1)\cdot \text{Pi}\cdot x}{L}\right)}{2\cdot n+1}\right), n=0..N\right)$$

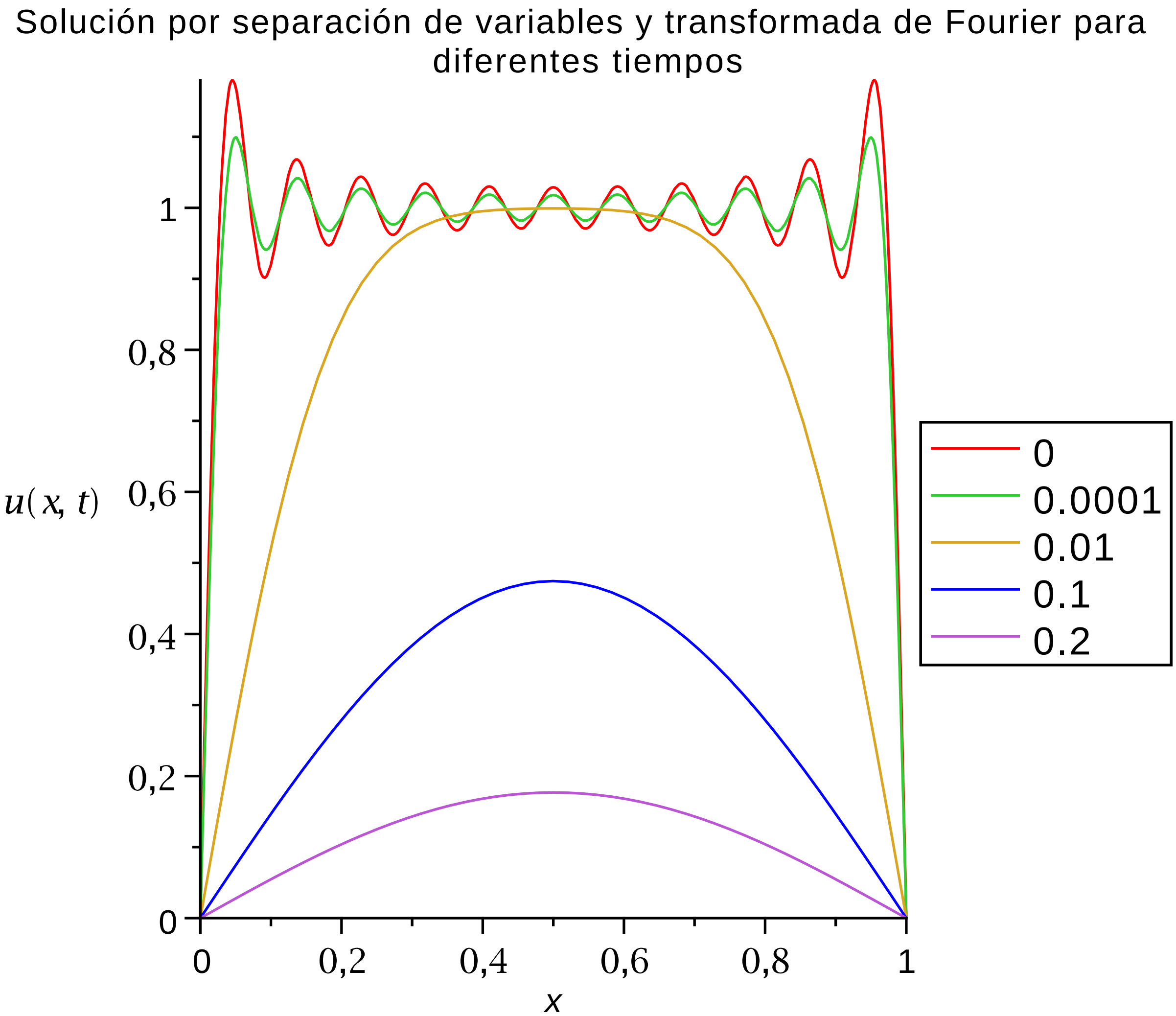
$$(x,t) \to \frac{4\,\alpha\left(\sum_{n=0}^{N}\frac{e^{-\frac{(2\,n+1)^2\,\pi^2\,k\,t}{L^2}}\sin\left(\frac{(2\,n+1)\,\pi\,x}{L}\right)}{2\,n+1}\right)}{\pi} \qquad \textbf{(1)}$$

alpha := 1 :
L := 1 :
k := 1 :

trunco la serie en N = 10 y grafico para t = 0, 10^{-4}, 10^{-2}, 0.1, 0.2

N := 10 :

plot([*u*(*x*, 0), *u*(*x*, 0.0001), *u*(*x*, 0.01), *u*(*x*, 0.1), *u*(*x*, 0.2)], *x* = 0 ..1, *legend* = ['0','0.0001','0.01','0.1','0.2'], *labels* = ['x','*u*(*x*, *t*)'], title = typeset("Solución por separación de variables y transformada de Fourier para diferentes tiempos"))



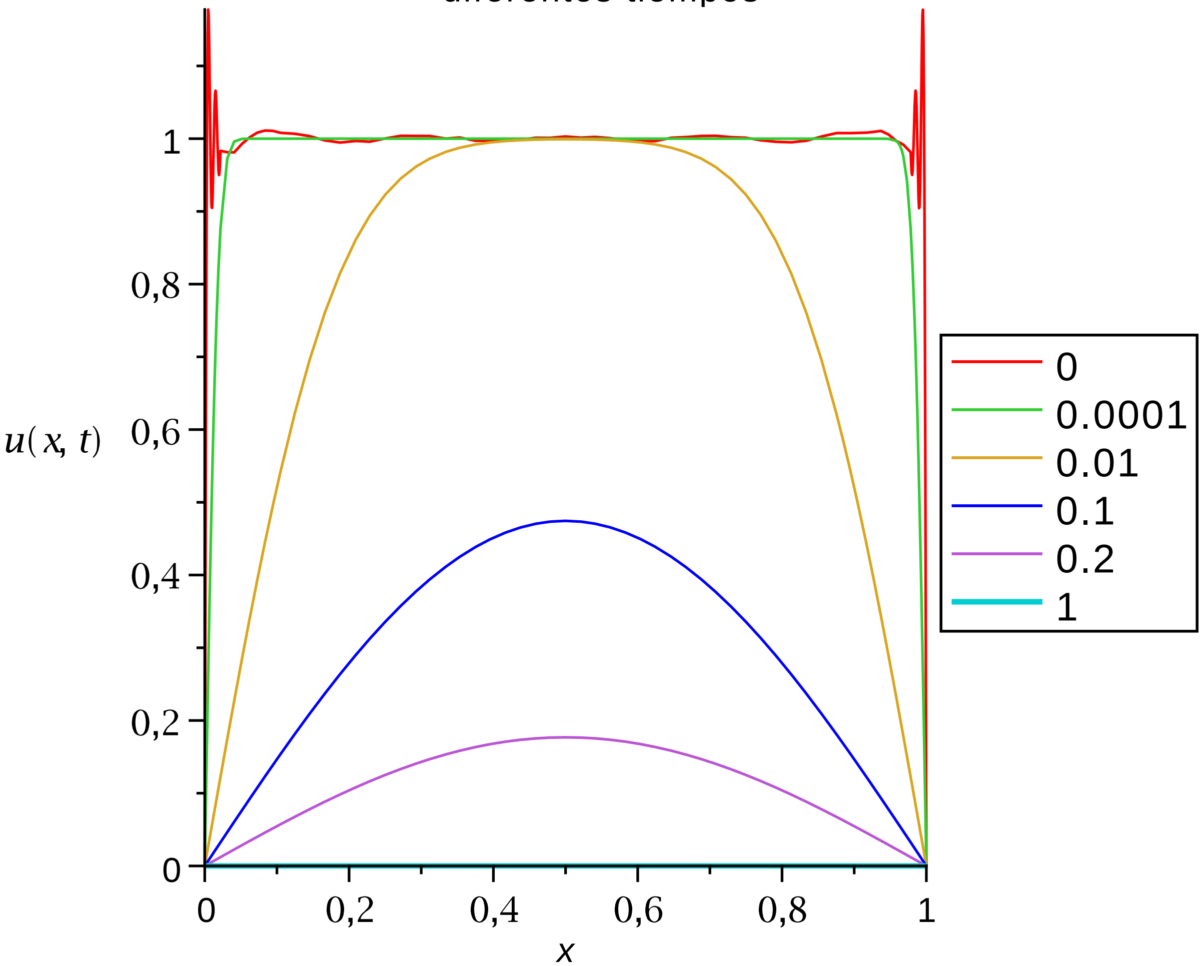
Notar que la aproximación u(x, 0) = 1 es muy mala (línea roja), mientras que a tiempos largos la solución es excelente.

Ahora propongo N=100 y gafico nuevamente.

$N := 100:$

plot([*u*(*x*, 0), *u*(*x*, 0.0001), *u*(*x*, 0.01), *u*(*x*, 0.1), *u*(*x*, 0.2), *u*(*x*, 1)], *x* = 0 ..1, *legend* = ['0','0.0001','0.01','0.1','0.2','1'], *labels* = ['*x*','*u*(*x*, *t*)'], title = typeset("Solución por separación de variables y transformada de Fourier para diferentes tiempos"))

Solución por separación de variables y transformada de Fourier para diferentes tiempos



La solución mejora a tiempos cortos. De todos modos mientras nos acercamos a t = 0, más terminos de la serie son necesarios para obtener una buena aproximación. Notar que en t = 1 ya tenemos u(x, 1) = 0, la solución esperada a tiempos largos.

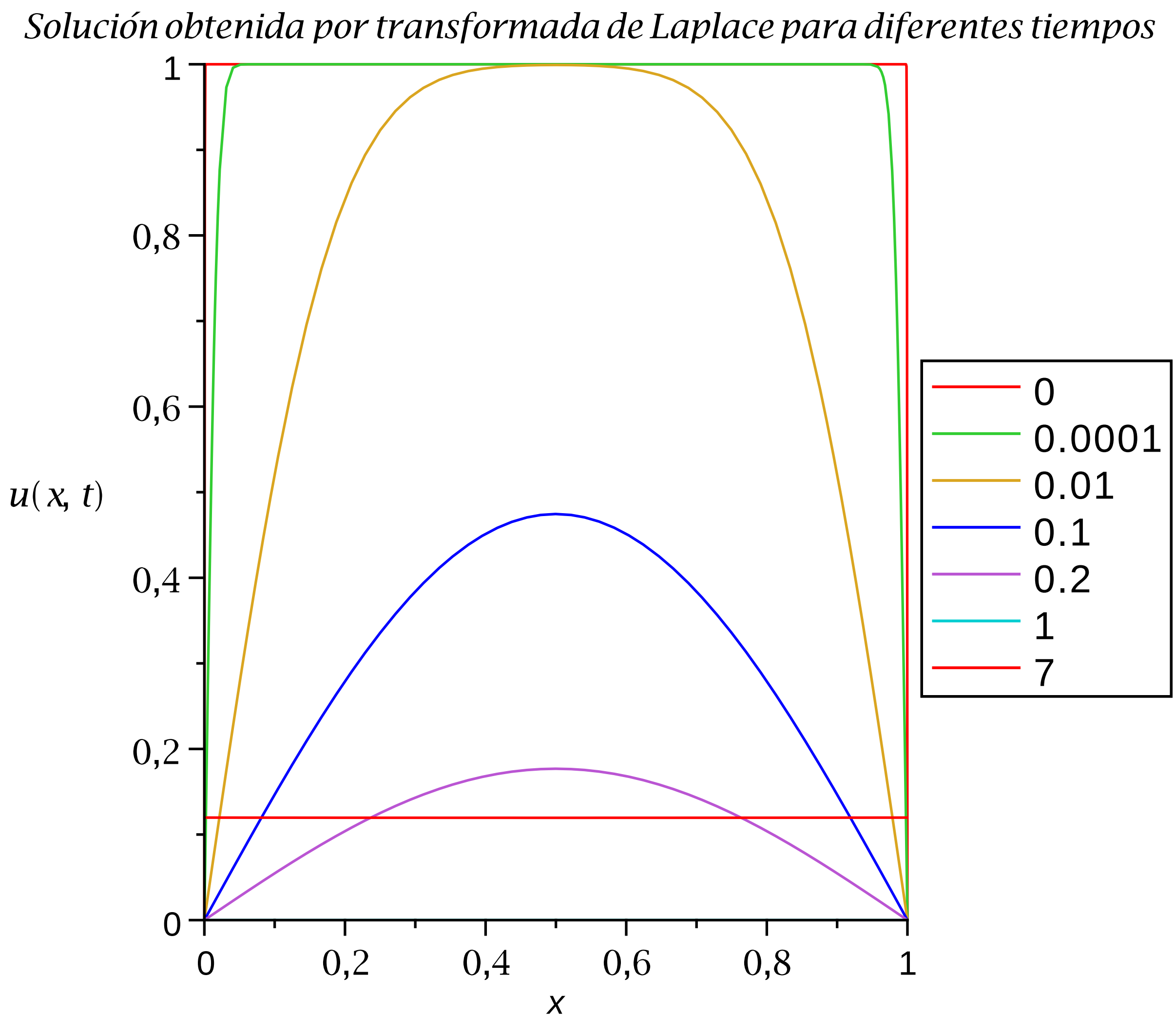
Ahora proponemos la solución obtenida por la transformada de Laplace

$$v := (x, t) \rightarrow \text{alpha} \cdot \left(1 - \mathit{sum}\left(\operatorname{erfc}\left(\frac{L \cdot \left(2 \cdot n + 1 - \frac{x}{L} \right)}{2 \cdot \operatorname{sqrt}(k \cdot t)} \right) - \operatorname{erfc}\left(\frac{L \cdot \left(2 \cdot n + 2 - \frac{x}{L} \right)}{2 \cdot \operatorname{sqrt}(k \cdot t)} \right) + \operatorname{erfc}\left(\frac{L \cdot \left(2 \cdot n + \frac{x}{L} \right)}{2 \cdot \operatorname{sqrt}(k \cdot t)} \right) - \operatorname{erfc}\left(\frac{L \cdot \left(2 \cdot n + 1 + \frac{x}{L} \right)}{2 \cdot \operatorname{sqrt}(k \cdot t)} \right), n = 0..N \right) \right);$$

$$(x,\,t)\rightarrow\alpha\left(1-\left(\sum_{n=0}^{N}\left(\operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2}\,\frac{L\left(2\,n+1-\frac{x}{L}\right)}{\sqrt{k\,t}}\right)-\operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2}\,\frac{L\left(2\,n+2-\frac{x}{L}\right)}{\sqrt{k\,t}}\right)\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.+\operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2}\,\frac{L\left(2\,n+\frac{x}{L}\right)}{\sqrt{k\,t}}\right)-\operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2}\,\frac{L\left(2\,n+1+\frac{x}{L}\right)}{\sqrt{k\,t}}\right)\right)\right)\right) \tag{2}$$

Pruebo N=10 y grafico para los mismos tiempos que en el ejemplo anterior y uno más grande.

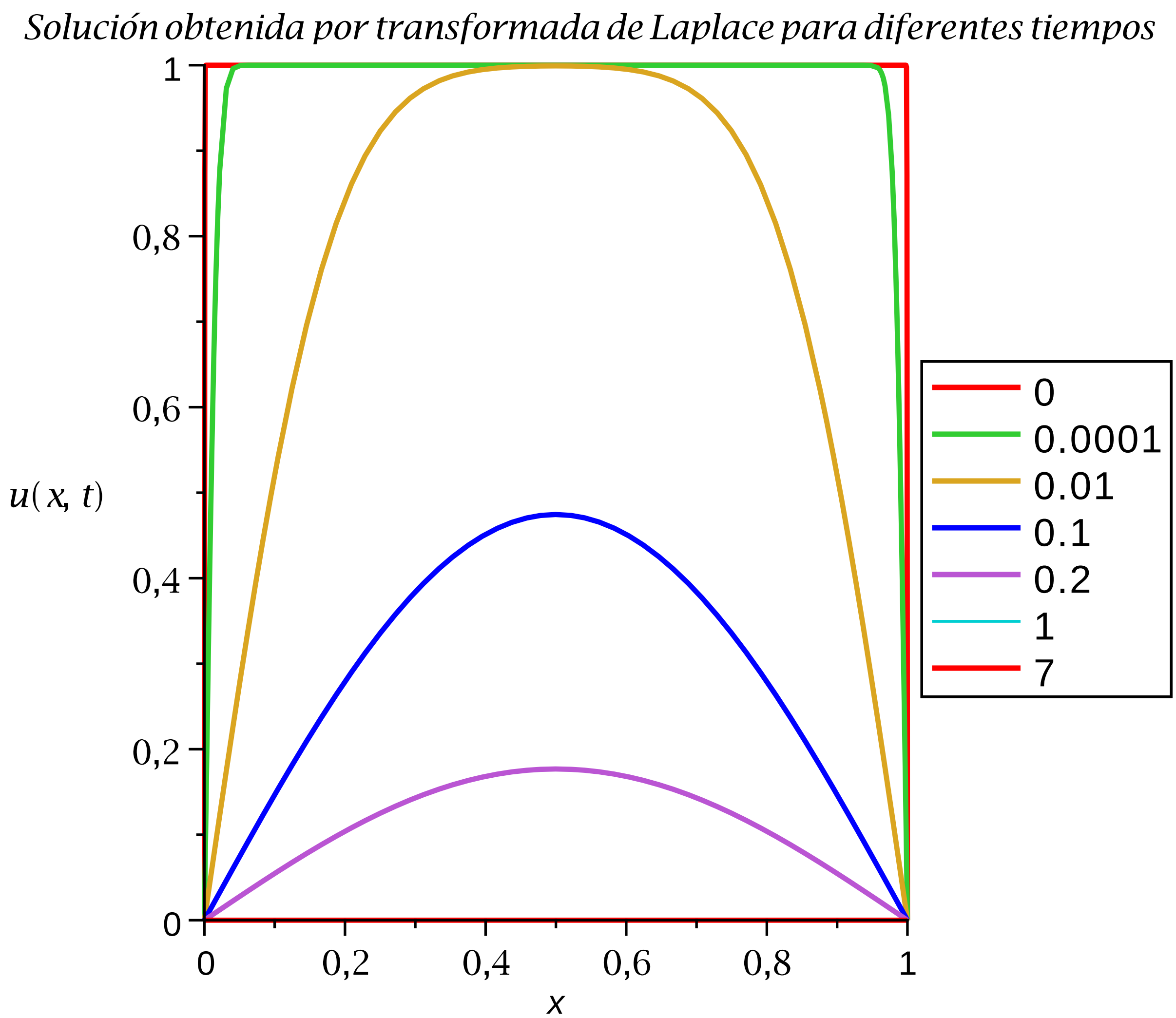
$N := 10:$
$plot([v(x, 0.0000001), v(x, 0.0001), v(x, 0.01), v(x, 0.1), v(x, 0.2), v(x, 1), v(x, 100)], x = 0..1, legend = ['0','0.0001','0.01','0.1','0.2','1','7'], labels = ['x','u(x, t)'], title = $'*Solución obtenida por transformada de Laplace para diferentes tiempos*')



Resulta evidente que a tiempos muy cortos esta aproximación es excelente, *pero* a tiempos largos ya no es suficiente.

Entonces pruebo
$N = 100:$

```
plot([v(x, 0.0000001), v(x, 0.0001), v(x, 0.01), v(x, 0.1), v(x, 0.2), v(x, 2), v(x, 7)], x
   = 0..1, legend = ['0','0.0001','0.01','0.1','0.2','1','7'], labels = ['x','u(x, t)'], title =
   'Solución obtenida por transformada de Laplace para diferentes tiempos')
```



y veo que ahora vuelvo a recuperar el resultado esperado. Mientras más lejos me vaya en el tiempo, más términos de la serie voy a necesitar para tener una buena aproximación, por suerte tengo infinitos para agregar!.