Métodos Matemáticos de la Física II

Solución[1] del Problema 3, Guía 1

Problema 3: Sea p una función real diferenciable sobre los reales. Muestre que la ecuación

$$u_t = p(u)u_x \ , \quad t > 0 \ ,$$

tiene una solución de la forma $u(x,t) = f(x + p(u(x,t))t)$ donde f es real y diferenciable sobre los reales y cumple cierta condición. Use esto para determinar soluciones de las ecuaciones

a) $u_t = ku_x$, k constante;

b) $u_t = uu_x$;

c) $u_t = u\sin(u)u_x$.

¿Que condición puede agregarse para determinar a f?

Ante todo es notable la confusión que generó este problema. Lo que se pretende es dar una idea de la amplitud de métodos y ideas que se deben emplear para obtener información sobre soluciones de EDs. La idea es leer el problema como una receta para construir soluciones de la ec. diferencial.
Apelamos al Teorema de la Función Implícita multidimensional. La relación

$$u = f(x + p(u)t) \tag{1}$$

define implicitamente una función u de (x,t) en un entorno de un punto (x_o, t_o, u_o) en el cual se cumple (1) si la derivada de esta expresión respecto de u no se anula en ese punto, o sea:

$$1 \neq f'(x_o + p(u_o)t_o)t_o p'(u_o) \ . \tag{2}$$

En tal caso, se tiene en ese entorno las derivadas parciales

$$u_t = \frac{f'(x + p(u)t)\ p(u)}{1 - f'(x + p(u)t)tp'(u)} \ ;$$

$$u_x = \frac{f'(x + p(u)t)}{1 - f'(x + p(u)t)tp'(u)} \ ;$$

de modo que efectivamente $u_t = p(u)u_x$ y u es solución de la EDP.

Supongase que se tiene dado el "valor inicial" $u(x,0) = \varphi(x)$ para x en un abierto $A \subset \mathbb{R}$ donde φ es diferenciable. Cualquiera sea $x \in A$, los puntos $(x, 0, f(x))$ cumplen con (1). Además, la condición (2) se cumple trivialmente ($t_0 = 0$) en estos mismos puntos. Por lo tanto, hay una solución (localmente en las inmediaciones de los puntos $\{(x,0) \ : \ x \in A\}$) del problema de "valores iniciales"

$$u_t = p(u)u_x \ , \quad u(x,0) = \varphi(x) \ , \quad x \in A \ ,$$

para t lo suficientemente chico (cuan chico puede depender del x). ¡Y este resultado de existencia de solución local del problema de "valores iniciales" vale cualquiera sea la función p!

Veamos ahora lo que propone el planteo del ejercicio.

[1] G.A. Raggio

a) Con $p(u) = k$ la condición (2) se cumple pues $p' = 0$. Entonces $u = f(x + kt)$ es solución –lo que se puede verificar directamente haciendo las derivadas parciales. En este caso se puede ver por un método directo[2] que esta es la solución general: toda solución de la ec. diferencial es de la forma $u(x, t) = f(x + kt)$ con f diferenciable.

b) Con $p(u) = u$ se tiene $p'(u) = 1$ de modo que (2) es $f'(x + ut)t \neq 1$. Probemos algunas funciones f:

- $f(x) = c$ con c constante. Se cumple la condición trivialmente y $u = c$ es efectivamente una solución.
- $f(x) = ax + b$ con a, b constantes no ambas nulas; entonces la condición es $t \neq 1/a$ en cuyo caso $u = a(x + ut)$ implica $u(x, t) = (ax + b)/(1 - at)$ que es solución (verficar) si $t \neq a$. Esta solución resuelve el problema de "valor inicial" $u_t = uu_x$, $u(x, 0) = ax + b$; vemos que deja de existir en $t = 1/a$. La geometría es muy simple: a partir de la recta inicial $ax + b$ la evolución ($a > 0$ y $t > 0$) es una recta donde va cambiando tanto la pendiente $a/(1 - at)$ como la ordenada al origen $b/(1 - at)$. Al "tiempo" $t = 1/a$ la derivada parcial respecto de x deja de existir (la recta tiene pendiente infinita).
- $f(x) = x^2$; entonces la condición es

  $$2(x + ut)t \neq 1 \ .$$

  Escribiendo (1)

  $$(x + ut)^2 = u$$

  obtenemos la función

  $$u^{\pm}(x, t) = \frac{1}{2t^2} - \frac{x}{t} \pm \frac{1}{2t^2}\sqrt{1 - 4xt}$$

  siempre que $t \neq 0$ y $xt \leq 1/4$. Insertando estas funciones en la condición obtenemos que $1 - 4xt \neq 0$. Por lo tanto, $u^{\pm}(x, t)$ son ambas soluciones de la ec. diferencial $u_t = uu_x$ siempre que $xt \leq 1/4$ y $t \neq 0$. Esto se puede verificar haciendo las derivadas parciales necesarias.
  Consideremos $t > 0$. Las soluciones $u^{\pm}$ están definidas siempre que $x \leq 1/4t$. Observe que

  $$\lim_{t \to 0^+} u^{\pm}(x, t) = \begin{cases} x^2 & , \quad \text{para } u^- \text{ y todo } x \in \mathbb{R} \\ +\infty & , \quad \text{para } u^+ \text{ y todo } x \in \mathbb{R} \end{cases} \ .$$

  Por lo tanto,la función u^- definida para $t > 0$ en el sector $S_t := \{(x, t) : \ t > 0 \ , \ \ x \leq x_f(t) := 1/4t\} \subset \mathbb{R}^2$ y por $u(x, 0) := x^2$ para $t = 0$, es solución del problema de "valor incial"

  $$u_t = uu_x \text{ en } S_t \ , \ \ u(x, 0) = x^2 \ .$$

  Notese que esta solución desarrolla un frente $x^f(t) = 1/4t$ de modo que deja de estar definida para $x > x_f(t)$. Esta solución ¿puede o no extenderse a $x > x_f(t)$? La respuesta amerita una investigación que no he hecho y desconozco la respuesta.

  En la figura 1, se grafica u^- como función de x para valores de t que crecen sucesivamente.

[2] El caso $k = 1$ se desarrolló en clase.

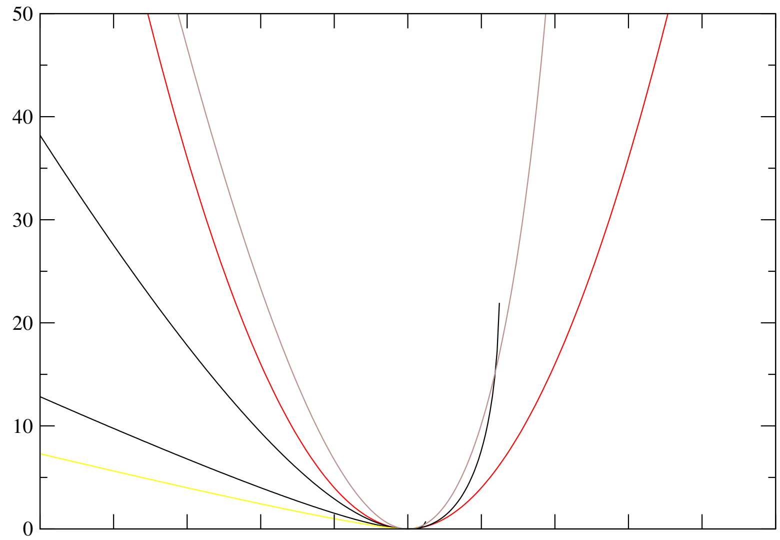

Figura 1: $u^-(x,t)$ con valores crecientes de t a partir de $t=0$. Todas las curvas exceptuando aquella para $t=0$ ($u^-(x,0)=x^2$) terminan en $x_f(t)=x_f(t)=1/4t$.

- Con $f(x)=1/x$ la condición es $-t\neq(x+ut)^2$ y la ec. que determina $u(x,t)$ es

  $$u^2t+ux-1=0\;;$$

  de modo que

  $$u^{\pm}(x,t):=-\frac{x}{2t}\pm\frac{1}{2t}\sqrt{x^2+4t}$$

  siempre que $x^2+4t\geq 0$ nos da solución si se cumple la condición. Esto impone a su vez, que $x\neq 0\neq t$.
  Analizamos la situación para $t>0$ en cuyo caso $x^2+4t\geq 0$ para todo x. Tenemos

  $$\lim_{t\to 0^+}u^{\pm}(x,t)=\left\{\begin{array}{ccl}\pm\infty & , & x\leq 0 \text{ (resp. } x\geq 0)\\ 1/x & , & x>0 \text{ (resp. } x<0)\end{array}\right. .$$

  De modo que la función

  $$u(x,t):=\left\{\begin{array}{lcl}1/x & , & \text{para } t=0 \text{ y } x\neq 0\\ u^+(x,t) & , & \text{para } t>0 \text{ y } x>0\\ u^-(x,t) & , & \text{para } t>0 \text{ y } x<0\end{array}\right.$$

  es solución del problema de "valor inicial" $u_t=uu_x$ para $x\neq 0$ y $t>0$ con $u(x,0)=1/x$. Observe que tanto u^+ es solución de la ED para $x\leq 0$ asi como u^- es solución de la ED para $x\geq 0$ (siempre para $t>0$) pero no son estas soluciones del problema de valor inicial planteado.
  En la figura 2 se grafica la solución u del problema de valores inciales para $x>0$ con $u(x,0)=1/x$.

Creo que queda claro que el procedimiento produce soluciones y que estas deben rediscutirse a la luz de las condiciones subsidiarias a la ED propiamente dicha. Además se ejemplifica como estas soluciones tienen ciertas propiedades peculiares (debidas ellas a la no-linealidad de la ED, a singularidades de la condición, o a ambas causas).

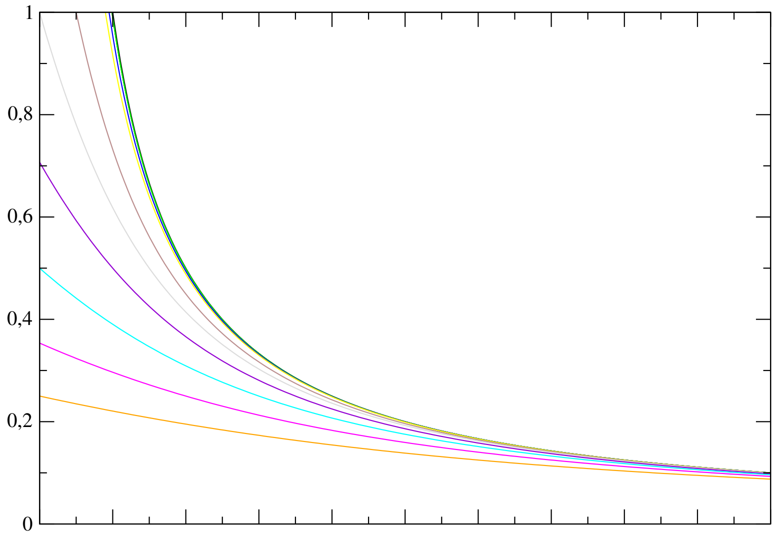

Figura 2: $u^{-}(x,t)$ con valores crecientes de t a partir de $t = 0$.

c) Con $p(u) = u\sin(u)$, tenemos $p'(u) = \sin(u) + u\cos(u)$. Y la condición es

$$t[u\cos(u) + \sin(u)]f'(x + ut\sin(u)) \neq 1 \ .$$

Es generalemente imposible no sólo obtener una fórmula explícita para $u(x,t)$ a partir de (1) sino también chequear la condición.