Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación U.N.C.

Métodos Matemáticos de la Física II

Guía N° 4 (05/05/16)

Problema 1: Resuelva la ecuación de Laplace dentro de una región rectangular $0 \leq x \leq L, 0 \leq y \leq H$, con las siguientes condiciones de borde:

a) $u(0,y) = \sin(\frac{2\pi y}{H}), \qquad u(L,y) = 0, \qquad u(x,0) = 0, \qquad u(x,H) = 0$

b) $\frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = 0, \qquad u(L,y) = 2y, \qquad u(x,0) = 0, \qquad u(x,H) = 0$

Problema 2: Encuentre la solución acotada de la ecuación $\Delta u = 0$ en el exterior de un disco de radio a sujeto a las condiciones de borde $u(a,\theta) = \ln 2 + 4\cos(3\theta)$.

Problema 3: Encuentre aquella solución de la ecuación de Laplace en el interior del disco unitario de radio $r = 1$ que tenga valores en la frontera dados por

$$f(1,\phi) = \begin{cases} V_0 & 0 < \phi < \pi \\ 0, & \pi < \phi < 2\pi \end{cases}$$

donde V_0 es una constante.

Problema 4: Un cilindro recto sólido semi-infinito de radio a mantiene su superficie curva a $0°C$ y su base a una temperatura de T_0. Encuentre la distribución de temperatura en el cilindro en el estado estacionario.

Problema 5: Considere una esfera metálica de radio unitario, con una condición de frontera:

$$U(1,\theta) = \begin{cases} U_0 & 0 < \theta < \pi/2 \\ 0, & \pi/2 < \theta < \pi \end{cases},$$

donde U_0 es una constante. Podemos dar a este problema, las siguientes interpretaciones (entre otras), para las cuales nos interesa conocer su solución:

a) Suponga que la esfera es sólida y la condición de frontera representa una distribución de temperatura. Determine el estado estacionario.

b) Suponga que la esfera es hueca y la condición de frontera representa una distribución de potencial electrostático. Encuentre el valor del potencial dentro y fuera de la esfera. En particular, determine el valor de la solución en el ecuador de la esfera ($\theta = \pi/2$).

Problema 6: Una esfera conductora, descargada de radio a se encuentra dentro de un campo electrostático uniforme de magnitud E. La esfera se sitúa en el origen de un sistema coordenado. El campo eléctrico uniforme, orientado según la dirección del eje polar, genera un potencial electrostático: $u = -Ez$, donde se toma arbitrariamente $u(z=0) = 0$. Muestre que la esfera se comporta como un dipolo eléctrico.

Problema 7: Determine las armónicas radiales no constantes en d dimensiones.

Problema 8: Considere el problema de valores iniciales para la solución u de la ecuación de ondas en 3 dimensiones espaciales (c =1) con $u_t(\boldsymbol{x}, 0) = 0$ y

$$u(\boldsymbol{x},0)=\begin{cases} 1 & , \quad \text{si } |\boldsymbol{x}|\le 1 \\ 0 & , \quad \text{si } |\boldsymbol{x}|\ge 1 \end{cases}$$

Muestre que u depende de solamente de $|\boldsymbol{x}|$ y grafique el perfil radial para tiempos típicos. Por ejemplo: $t = 0$, $1/10$, $2/10$, $1/2$, 1, $11/10$, $3/2$, 2, 3. ¿Cómo se comporta el perfil asintóticamente para $t \to \infty$?

Problema 9: Para un campo escalar ψ definido en $\mathbb{R}^d$ sea

$$\overline{\psi}(r) := \frac{1}{|S_r|}\int_{S_r} \psi(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}, \quad r>0,$$

el promedio de ψ en la esfera de radio $r>0$ alrededor de $\mathbf{0}$. Aquí $|S_r|$ es el volumen ($(d-1)$-dimensional) de la esfera de radio $r>0$ dada por

$$|S_r| = \frac{2\pi^{d/2} r^{d-1}}{\Gamma(d/2)}.$$

Verifique que $\overline{\psi}(0) := \lim_{r\to 0}\overline{\psi}(r) = \psi(\mathbf{0})$.

Verifique que

$$\frac{d\overline{\psi}}{dr} = \frac{1}{|S_r|}\int_{S_r} (\nabla\psi)\cdot \boldsymbol{n}\, d\boldsymbol{x} = \frac{1}{|S_r|}\int_{B_r} \Delta\psi\, d\boldsymbol{x},$$

donde $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{x}/|\boldsymbol{x}|$ es la normal exterior a S_1 en $\boldsymbol{x}\in S_1$ y $B_r = \{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d : |\boldsymbol{x}|\le r\}$ es la bola de radio r alrededor de $\mathbf{0}$.

Muestre que $\Delta\overline{\psi} = \overline{\Delta\psi}$ para $d = 1, 2, 3$. ¿Puede demostrar esto en dimensión d arbitraria?

Sugerencia: Determine $\frac{d^2\overline{\psi}}{dr^2}$.

Problema 10:

a) Repita los cálculos realizados en clase para dimensiones mayores o iguales a 3 en el caso bi-dimensional para obtener la fórmula

$$u(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial D}\left[u(\boldsymbol{y})\frac{\partial}{\partial n}\ln(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|) - \frac{\partial u}{\partial n}(\boldsymbol{y})\,\ln(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|)\right] ds$$

válida para una función armónica u en un abierto acotado $D\subset\mathbb{R}^2$ de borde suave ∂D. $\partial/\partial n$ denota la derivada direccional en la dirección normal exterior a D a lo largo de ∂D: $(\partial f/\partial n)(\boldsymbol{x}) = (\nabla f)(\boldsymbol{x})\cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})$; ds denota el elemento de linea a lo largo de ∂D.

b) Determine la función de Green para el disco $D = \{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2 : |\boldsymbol{x}|\le 1\}$ con condición de Dirichlet y recupere asi la fórmula integral de Poisson.

Sugerencia: tenga en cuenta los resultados del problema anterior. Muestre que si f es continua sobre D entonces para $\boldsymbol{a}\in D$

$$\lim_{r\to 0^+}\frac{1}{|B_r(\boldsymbol{a})|}\int_{B_r(\boldsymbol{a})} f(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} = f(\boldsymbol{a})\ .$$

Recuerde que $\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \ln(x) = 0$ cualquiera sea $\alpha>0$.

Problema 11: Determine la función de Green para el semi-espacio $\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3 : ax_1+bx_2+cx_3>0\}$ determinado por a, b, y c.