Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación U.N.C.

Métodos Matemáticos de la Física II

Guía N° 5 (17/05/16)

Problema 1: Encuentre las funciones de Green y resuelva la siguiente ecuaciones:

a) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{1}{4}y = \sin(2x); \quad y(0) = y(\pi) = 0.$

b) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \alpha\dfrac{dy}{dx} = e^{-\beta x}$, para $x > 0$; $\alpha, \beta > 0$; $\quad y(0) = \dfrac{dy}{dx}(0) = 0.$

c) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{1}{4}y = x; \quad y(0) = \alpha,\ y(\pi) = \beta.$

Problema 2: Sea:

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Claramente $f(x)$ es continua pero no diferenciable (en el sentido clásico). Encuentre las dos primeras derivadas de f en el sentido distribucional.

Problema 3: Encontrar la derivada generalizada de la siguiente funcion de período 2π

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}(\pi + x) & -\pi < x \leq 0 \\ \frac{1}{2}(\pi - x) & 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

Problema 4:

a) Sea x_0 la única solución la ecuación $g(x) = 0$ en el intervalo $a < x < b$ y $g'(x_0) \neq 0$, mostrar que

$$\int_a^b f(x)\,\delta(g(x))\,dx = \frac{f(x_0)}{|g'(x_0)|}$$

b) A partir del resultado anterior, con las mismas suposiciones, ver que

$$\delta(g(x)) = \sum_n \frac{\delta(x - x_n)}{|g'(x_n)|}$$

donde x_n son los ceros de la función $g(x)$ en $-\infty < x < \infty$.

c) Muestre, usando el resultado anterior, que

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{\delta(x + a) + \delta(x - a)}{2|a|},$$

relación muy usada en teoría de ondas lineales no dispersivas, en donde se tiene $\delta\left(t^2 - \frac{|\mathbf{x}|^2}{c^2}\right)$.

d) Evalúe la expresión

$$\int_0^\pi dx \int_1^2 dy\, \delta(\sin(x))\delta(x^2 - y^2)$$

Problema 5: Considere la función $x \mapsto x^2$ en la recta real como distribución y determine su transformada de Fourier.