Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación U.N.C.

Métodos Matemáticos de la Física II

Guía N° 6 (31/05/16)

Problema 1: A partir del problema de autovalores $\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = 0$, muestre que

a) $\delta(x-\xi) = \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{n\pi\xi}{L})\sin(\frac{n\pi x}{L})$, $0 < x, \xi < L$, $y(0) = 0, y(L) = 0$.

b) $\delta(x-\xi) = \frac{1}{L} + \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty} \cos(\frac{n\pi\xi}{L})\cos(\frac{n\pi x}{L})$, $0 < x, \xi < L$, $y'(0) = 0, y'(L) = 0$.

Problema 2: Resuelva el problema de autovalores del Laplaciano en el disco plano de radio 1 con condición de Neumann en el borde.

Problema 3: Suponga conocidos los autovalores $\{\lambda_n : n = 1, 2, \cdots\}$ y autofunciones $\{h_n : n = 1, 2, \cdots\}$ de $-\Delta$ en un abierto acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ de borde (suave). Use estos datos para resolver el problema de Cauchy (dato inicial) para la ecuación de difusión en Ω.

Problema 4: En la discusión de funciones de Green para la ec. de ondas en 3 dimensiones espaciales se afirmó que:

a) $G(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{y}, s) = \dfrac{1}{4\pi c^2|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\delta(t - s - |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|/c)$ es la función de Green del problema

$$\Gamma_{tt} - c^2\Delta\Gamma = \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\delta(t-s) \ , \ \ \Gamma = \Gamma_t = 0 \ , \ t < s \ .$$

b) $R(\boldsymbol{x}, t) = \dfrac{1}{2\pi c}\delta(c^2(t-s)^2 - |\boldsymbol{x}|^2)\mathrm{sgn}(t)$ (llamada función de Riemann) es la función de Green del problema

$$\Gamma_{tt} - c^2\Delta\Gamma = 0 \ , \ \ \Gamma(\boldsymbol{x}, 0) = 0 \ , \ \Gamma_t(\boldsymbol{x}, 0) = \delta(\boldsymbol{x}) \ . \tag{1}$$

Discuta cuál es la EDP que satisface la función

$$u(\boldsymbol{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} G(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{y}, 0)\psi(\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y}$$

en el caso a) y la función

$$w(\boldsymbol{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} R(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}, 0)\psi(\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y}$$

en el caso b). Suponga que ψ es una función de prueba.

Problema 5: Determine la solución distribucional de (1) en 2 dimensiones espaciales.