Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación U.N.C.

Métodos Matemáticos de la Física II

Guía N° 7 (7/06/16)

Problema 1: Se consideran tres eventos A, B y C asociados con un experimento.

a) Exprese en términos de conjuntos las proposiciones: (i) Al menos uno de los eventos ocurre; (ii) exactamente uno de los eventos ocurre; (iii) exactamente dos de los eventos ocurren; (iv) No ocurren más de dos de los eventos.

b) Se tiene $P(A) = P(B) = P(C) = 1/4$, $P(A \cap B) + P(C \cap B) = 0$ y $P(A \cap C) = 1/8$. Calcule la probabilidad de que 'al menos uno de los eventos ocurre'.

Problema 2: En ese mundo hay dos tipos distintos de cajas de caramelos. Uno de los tipos –que ocurre en el 60 % de los casos– tiene 70 % de caramelos de frutilla y los otros de limón. El otro tipo tiene la proporción frutilla/limón invertida. Me regalan una caja y al azar tomo un caramelo y me lo como. ¿Que tipo de caja me regalaron?

Problema 3: Se tienen 2 fichas blancas y 4 fichas negras en una urna. Se extraen 2 fichas al azar. ¿Cual es la probabilidad de que sean ambas blancas?

Problema 4: (Independencia) Se tira el mismo dado (perfecto) 2 veces y se considera los eventos $A = \{$ el primer número es par$\}$ y $B = \{$ el segundo número es 3 o 6$\}$. Intuitivamente estos eventos son independientes. Determine $P(A)$, $P(B)$, $P(A|B)$ y $P(B|A)$ y observe que $P(B) = P(B|A)$ y $P(A) = P(A|B)$.
Ahora: muestre que las siguientes definiciones de 'los eventos A y B son independientes' son equivalentes. (i) $P(A \cap B) = P(A)P(B)$; (ii) $P(A|B) = P(A)$ y $P(B|A) = P(B)$.
Por último: Muestre que dos eventos mutuamente excluyentes no son necesariamente independientes y viceversa.

Problema 5: Se tiene un lote de $N = 10000$ artículos de los cuales el 10 % son defectuosos. Se escogen al azar sucesivamente dos de estos artículos y se consideran los eventos $A = \{$el primero no es defectuoso$\}$ y $B = \{$el segundo no es defectuoso$\}$. Discuta la independencia y determine $P(A \cap B)$ suponiendo que: (i) se repone el primer artículo antes de elegir el segundo; (ii) no se repone. ¿Que sucede si $N = 3, 10, 30$?

Problema 6: Este 'teléfono' recibe uno de N posibles impulsos distintos y con probabilidad p transmite la letra específica (correcta) asociada al impulso mientras que con probabilidad $1 - p$ transmite una de las otras $N - 1$ letras equivocadas. Uno de estos impulsos es elegido al azar y con este impulso se alimentó al teléfono dos veces obteniendose ambas veces la misma letra transmitida. Calcule la probabilidad de que el impulso es el asociado con esa letra.

Problema 7: Una sociedad muy tradicionalista, con marcada preferencia por los hijos varones, practica un particular método de control de natalidad: cada mujer continúa teniendo hijos mientras dé a luz varones, pero si tiene una niña deja de tener hijos (los partos múltiples son muy raros en esta sociedad, y podemos despreciarlos). Calcule la proporción entre varones y mujeres en la población resultante.

Problema 8: Un conjunto de $N = 125$ votantes realizan una elección donde deben votar por una de dos alternativas ('a favor' o 'en contra'), sin abstenciones ni votos en blanco.

a) Si cada votante tiene igual probabilidad $p = 1/2$ de votar a favor y $q = 1/2$ de votar en contra, calcule la probabilidad de que la elección sea decidida por un solo voto (es decir, calcule la probabilidad de que un único voto invierta el resultado).

b) Idem al punto anterior pero con $p = 3/5$ y $q = 2/5$.

c) Considere ahora una elección indirecta, donde los mismos votantes se dividen en 5 distritos de 25 votantes cada uno. Cada distrito elige un elector con mandato de votar por la propuesta mayoritaria en su distrito, y los electores conforman un colegio electoral que decide por mayoría simple. Repita los cálculos de los dos puntos anteriores para esta situación.

Problema 9: Desde una superficie plana y horizontal, se dispara un proyectil con velocidad inicial dada (fija) y ángulo de elevación elegido al azar (uniformemente). Calcule la densidad de probabilidad para el alcance.

Problema 10: Halle el valor esperado de la distancia media de dos partículas que se ubican al azar, uniforme e independientemente, dentro de un segmento de largo unidad.

Discuta que ocurre cuando las mismas partículas se encuentran en un cuadrado de lado unidad o en un cubo de lado unidad.

Problema 11: La posición de una partícula en un plano tiene la distribución de probabilidad

$$F(r, \varphi) = \begin{cases} 0 & , \quad \text{si } r < 1 \\ 1 & , \quad \text{si } r \geq 1 \end{cases} ,$$

donde (r, φ) son coordenadas polares respecto de un punto fijo. Determine el coeficiente de correlación para las componentes cartesianas (respecto al punto fijo) de esta partícula.

Problema 12: Considere una variable aleatoria Y con una densidad de probabilidad normal de media μ y varianza σ. Se toma una muestra de tamaño N de esta variable, que consiste entonces en N variables aleatorias independientes Y_j, $j = 1, \cdots, N$ todas con la misma densidad. A partir de ellas se construyen“estimadores” $\overline{Y}$ y S para la media y la varianza, respectivamente, en la forma:

$$\overline{Y} := \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} Y_j \ , \quad S := \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} (Y_j - \overline{Y})^2 \ .$$

Ahora, un buen estimador no debe ser sesgado, es decir su esperanza debe ser igual a la del parámetro que estima. Determine si estos estimadores son o no sesgados y, en caso de serlo, cómo hay que modificarlos para que no lo sean.