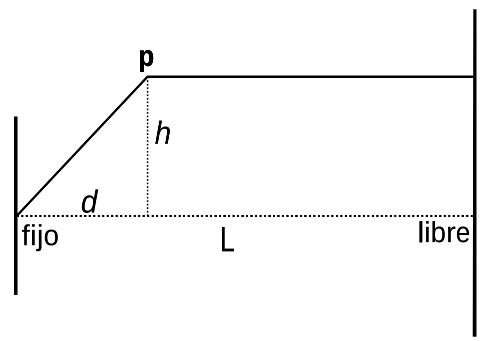
Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación U.N.C.

Métodos Matemáticos de la Física II

Primer parcial (28/04/16)

Problema 1: Considere una cuerda homogénea de longitud L con un extremo fijo y el otro libre (desliza sin roce sobre un eje). Si la cuerda en reposo sujeta en **p**, tal como lo indica la figura, se libera en un dado instante,
a) Escribir las condiciones iniciales y de borde del problema.
b) Determine las oscilaciones de la cuerda para todo $t > 0$.
c) Determine los valores del parámetro d tal que en la evolución temporal resultante no se encuentre el quinto modo de oscilación. Muestre que no es posible eliminar el modo fundamental.



Solución:

a) El problema es para una función u de variables $x \in [0, L]$ y $t \in [0, \infty)$ para la cual

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \tag{1}$$

$$u(0,t) = 0 \ , \ \ t \geq 0 \tag{2}$$

$$u_x(L,t) = 0 \ , \ \ t \geq 0 \tag{3}$$

$$u(x,0) = \psi_{d,h}(x) \ , \ \ u_t(x,0) = 0 \ , \ \ 0 \leq x \leq L \ . \tag{4}$$

La función $\psi_{d,h}$ es la de la figura:

$$\psi_{d,h}(x) = \begin{cases} hx/d & , \quad \text{si } 0 \leq x \leq d \\ h & , \quad \text{si } d \leq x \leq L \end{cases} \quad .$$

Observe que $\psi_{d,h}$ "cumple" con las condiciones de borde (aunque no es diferenciable en $x = d$).

b) Es muy pero muy razonable intentar la solución via el método de variables separadas. O sea: buscar todas las soluciones en variables separadas de (1-3) [ya que (2) y (3) son condiciones homogeneas] y plantear la solución del problema de Cauchy como combinación lineal (infinita) de estas soluciones especiales. Manos a la obra:

Con $u(x,t) = X(x)T(t)$ obtenemos de (1) que $XT'' = c^2 TX''$ y luego sendos problemas de autovalores

$$X'' = \lambda X \ , \ \ X(0) = X'(L) = 0 \ , \tag{5}$$

$$T'' = \lambda c^2 T \ . \tag{6}$$

Con la técnica usual (ver el Problema 2)

$$\lambda = -\frac{\int_0^h (X'(x))^2 \, dx}{\int_0^h (X(x))^2 \, dx}$$

de modo que $\lambda \leq 0$. Pero $\lambda = 0$ implica que $X = const.$ y por (2) $X \equiv 0$. De modo que $\lambda < 0$ y entonces (EDO de segundo orden con coef. constantes) X es combinación lineal real de las funciones $\cos(\sqrt{|\lambda|}x$ y $\sin(\sqrt{|\lambda|}x)$. De (2) obtenemos $X(x) = \sin(\sqrt{|\lambda|}x)$ y de (3) que $\cos(\sqrt{|\lambda|}L) = 0$ lo que equivale a $\lambda = -\mu_n^2$,

$$\mu_n := (2n+1)\pi/2L \ , \quad n \in \mathbb{N} \ .$$

Con estos valores de λ se obtiene la solución de (6) a $T_n(t) = a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)$ con $\omega_n := c\mu_n$. Las soluciones de (1-3) en variables separadas son

$$u_n(x,t) = \sin(\mu_n x)[a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)] \ , \quad n \in \mathbb{N} \ ,$$

siendo a_n y b_n constantes reales arbitrarias.

Ahora

$$u = \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$$

es formalemente una solución de (1-3). Para obtener (4):

$$\psi_{d,h}(x) = u(x,0) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \sin(\mu_n x) \ , \quad 0 = u_t(x,0) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \omega_n b_n \sin(\mu_n x) \ ,$$

que son ambos desarrollos en términos del sistema de funciones linealmente independiente y completo $\{[0,L] \ni x \mapsto \sin(\mu_n x) : n \in \mathbb{N}\}$. La ortogonalidad

$$\int_0^L \sin(\mu_n x) \sin(\mu_m x) \, dx = \frac{L}{2} \delta_{n,m}$$

nos da

$$b_n = 0 \ , \quad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L \psi_{d,h}(x) \sin(\mu_n x) \, dx \ , \quad n \in \mathbb{N} \ .$$

Calculo

$$a_n = \frac{2}{L} \left(\frac{h}{d} \int_0^d x \sin(\mu_n x) \, dx \ + h \int_d^L \sin(\mu_n x) \, dx \right)$$

$$= \frac{2h}{L} \left(-\frac{x \cos(\mu_n x)}{\mu_n d} \Big|_0^d + \frac{1}{\mu_n d} \int_0^d \cos(\mu_n x) \, dx - \frac{\cos(\mu_n x)}{\mu_n} \Big|_d^L \right)$$

$$= \frac{2h}{L} \left(-\frac{\cos(\mu_n d)}{\mu_n} + \frac{\sin(\mu_n d)}{\mu_n^2 d} + \frac{\cos(\mu_n x)}{\mu_n} \right) = \frac{2h}{L d \mu_n^2} \sin(\mu_n d) \ .$$

Entonces

$$u(x,t) = \frac{2h}{Ld} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\sin(\mu_n d)}{\mu_n^2} \sin(\mu_n x) \cos(\omega_n t)$$

$$= \frac{8hL}{d\pi^2} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\sin((2n+1)\pi d/L)}{(2n+1)^2} \sin((2n+1)\pi x/L) \cos((2n+1)\pi ct/L) \ .$$

Dado que la serie $\sum_{n \in \mathbb{N}} n^{-2}$ es convergente, el criterio de Weierstrass garantiza que nuestra serie para u converge uniformemente en $[0,L] \times [0,\infty)$.

c) Los modos de esta cuerda son las soluciones en variables separadas, o sea u_n con $n \in \mathbb{N}$, y tienen frecuencia angular ω_n que crece con n. La condición para que el modo de frecuencia ω_n no aparezca en el desarrollo de la solución u es que $a_n = 0$; o, equivalentemente, $\sin(\mu_n d) = 0$. Por lo tanto, para que la contribución de este modo se anule, es preciso que d sea un nodo (no trivial, i.e. distinto de 0) del modo. Estos nodos están caracterizados por

$$m\pi = \mu_n d = (2n+1)\pi d/(2L) \ , \quad \text{para algún } m \in \mathbb{N} \ , \ \ 0 < d < L \ .$$

Esto equivale a

$$0 < d/L = \frac{2m}{(2n+1)} < 1 \ , \quad \text{para algún } m \in \mathbb{N} \ .$$

Los nodos no triviales del modo de frecuencia ω_n son entonces los puntos

$$\frac{2m}{(2n+1)} L \ , \ \ m = 1, 2, \cdots, n$$

si $n \geq 1$ mientras que el modo fundamental de frecuencia $\omega_0 = \frac{c\pi}{2L}$ no tiene nodos no triviales. El quinto modo corresponde a la frecuencia ω_4 y los nodos no triviales correspondientes son cuatro: $2L/9$, $4L/9$, $2L/3$, y $8L/9$. Si d toma alguno de estos cuatro valores el quinto modo no contribuye a la solución (y viceversa).

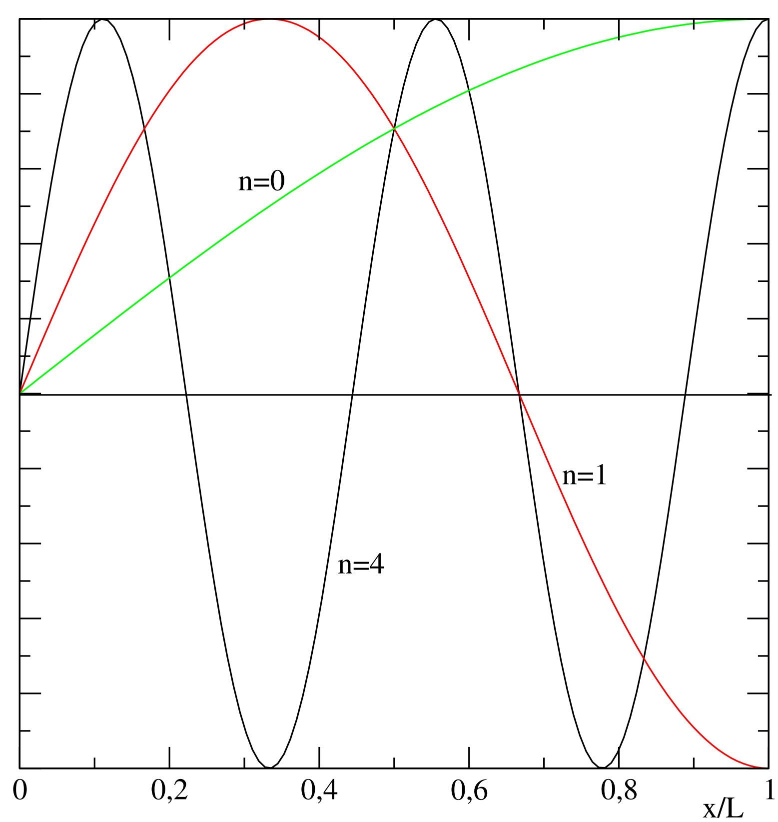


Figura 1: Los modos con $n = 0$ (fundamental), $n = 1$ y $n = 4$.

Problema 2: Nos interesan las soluciones estacionarias de la ec. de calor en un tubo cilíndrico recto de altura h y radio a inmerso en un medio con el cual no hay intercambio de energía, lo que se modela con las condiciones de borde de Neumann (en coordenadas cilíndricas (r, φ, z),

$0 \leq r \leq a$, $\varphi \in \mathbb{R}$, $0 \leq z \leq h$): para todo φ se tiene

$$u_r(a,\varphi,z) = 0\ ,\ 0 < z < h\ ,\ \text{y}\ u_z(r,\varphi,0) = u_z(r,\varphi,h) = 0\ ,\ \ 0 < r < a\ .$$

Determine las soluciones estacionarias en variables separadas que tengan simetría axial.

Información: La ecuación de Bessel modificada de orden cero es $z^2y'' + zy' - z^2y = 0$ para una función compleja y de una variable compleja $z \neq 0$. Esta ecuación diferencial admite dos soluciones linealmente independientes I_o y K_o que tienen el siguiente comportamiento asintótico para $x \to 0^+$:

$$I_o(x) \asymp 1\ ,\ \ K_o(x) \asymp -\ln(x)\ .$$

La función $0 < x \mapsto I_o$ y su derivada son positivas y <u>estrictamente</u> crecientes.

Solución: Claramente $u \equiv$ *const.* es solución estacionaria de la ec. de calor $u_t = k\Delta u$ con las condiciones de borde de Neumann especificadas. ¿Hay otras? ¿Hay otras con simetría axial (o sea: no dependen del ángulo azimutal φ)? ¿Hay otras con simetría axialque separen en las coordenadas cilíndricas naturales especificadas?

Buscamos entonces $u(r,z) = X(r)Z(z)$ con (1) $X'(a)Z(z) = 0$, $0 < z < h$; (2) $X(r)Z'(0) = X(r)Z'(h)$, $0 < r < a$; (3) $\Delta u = 0$. De (3) $(Z(X'' + r^{-1}X') + XZ'' = 0$ y luego

$$Z'' = \lambda Z\ ,\ \ X'' + r^{-1}X' + \lambda X = 0\ ,$$

donde λ es constante real. El problema queda reducido al problema de autovalores

$$Z'' = \lambda Z\ ,\ \ Z'(0) = Z'(h) = 0\ ;$$

y a la EDO

$$r^2X'' + rX' + \lambda r^2 X = 0\ ,\ \ X'(0) = 0\ .$$

Con el modus operandi usual (multiplicación de la ec. de autovalores por Z e integrando sobre $[0,h]$ usando la condición de borde) obtenemos

$$\lambda = -\frac{\int_0^h (Z'(z))^2\,dz}{\int_0^h (Z(z))^2\,dz}$$

de modo que $\lambda = 0$ y $Z' =$ *const.* o bien $\lambda < 0$. Luego, resolviendo la EDO, obtenemos la siguiente solución al problema de autovalores

$$\lambda = \lambda_n = -n^2\pi^2/h^2\ ,\ \ n \in \mathbb{N}\ ,\ \ Z_n(z) = \cos(n\pi z/h)\ .$$

La EDO para la función X es entonces

$$r^2X'' + rX' - (n\pi r/h)^2 X = 0\ ,\ \ n \in \mathbb{N}\ .$$

Para $n = 0$ (EDO de Euler) obtenemos $X_o(r) = a$ como única solución regular (la otra solución $\ln(r)$ es singular en 0); mientras que si $n > 0$, la transformación de variables $\xi := n\pi r/h$, $Y(\xi) := X(h\xi/(n\pi))$ nos entrega la EDO de Bessel modificada de orden cero

$$\xi^2Y'' + \xi Y' - \xi^2 Y = 0\ .$$

La información provista nos permite afirmar que la solución es $Y(\xi) = I_o(\xi)$ o sea $X(r) = I_o(n\pi r/h)$ ya que la función K_o es singular en el 0. Pero entonces

$$X'(r) = (n\pi/h)I_o'(n\pi r/h)\ ,$$

y por ende, $X'(a)$ no se anula ya que $0 < x \mapsto I_o'(x)$ es positiva luego I_o' no tiene ceros positivos[1]. Esto muestra que una solución estacionaria axialmente simétrica y que separe en coordenadas cilíndricas es necesariamente constante.

Problema 3: Considere la ec. de difusión en $V \subset \mathbb{R}^3$ que es acotado y de borde suave con la condición mixta $u + \alpha(\nabla u)\cdot \boldsymbol{n} = 0$ para todo $t \geq 0$ en ∂V donde α es una función no-negativa definida en ∂V y $\boldsymbol{n}$ es la normal unitaria exterior a V en ∂V. Muestre que la función $0 \leq t \mapsto \int_V u^2 dv$ es no-creciente y deduzca un resultado de unicidad para la solución de esta ec. de difusión si se le agrega una fuente.

Información: La primera identidad de Green dice que

$$\int_V \left[g(\boldsymbol{x})(\Delta f)(\boldsymbol{x}) + ((\nabla g)\cdot(\nabla f))(\boldsymbol{x})\right] \, d\boldsymbol{x} = \int_{\partial V} g(\boldsymbol{x})(\nabla f)(\boldsymbol{x}) \cdot d\boldsymbol{\sigma}$$

para campos escalares f y g los suficientemente diferenciables.

Solución: Con

$$E(t) := \int_V u^2 d\boldsymbol{x} \ , \quad t \geq 0 \ ,$$

donde u es solución de la ec. de difusión $u_t = k\Delta u$, $k > 0$, y cumple con la condición de borde mixta

$$u = -\alpha(\nabla u)\cdot \boldsymbol{n} \ , \tag{7}$$

en ∂V; tenemos

$$E'(t) = \int_V \frac{\partial u^2}{\partial t} \, d\boldsymbol{x} = 2\int_V u u_t \, d\boldsymbol{x} = 2k \int_V u \Delta u \, d\boldsymbol{x}$$

$$= -2k \int_V (\nabla u)^2 \, d\boldsymbol{x} \quad + 2k \int_{\partial V} u(\nabla u)\cdot \boldsymbol{n} \, d\sigma = -2k \left(\int_V (\nabla u)^2 \, d\boldsymbol{x} + \int_{\partial V} \alpha[(\nabla u)\cdot \boldsymbol{n}]^2 \, d\sigma \right)$$

donde hemos usado la primera identidad de Green y la condición (7) en ∂V. Claramente $E'(t) \leq 0$ y por ende $0 \leq t \mapsto E(t)$ es no-creciente. Deducimos entonces

$$0 \leq E(t) \leq E(0) = \int_V u(\boldsymbol{x}, 0)^2 \, d\boldsymbol{x} \ , \quad t > 0 \ ,$$

ya que en virtud de la defnción de E está magnitud es no-negativa.

Supongase que u_1 y u_2 son soluciones de le ec. de difusión $u_t = k\Delta u + f$ con condición inicial $u(\boldsymbol{x}, 0) = \varphi(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in V$, y la misma condición de borde (7), donde f es una fuente que es función de $(\boldsymbol{x}, t) \in V \times (0, \infty)$. Entonces $u := u_1 - u_2$ es solución de la ec. de difusión (sin fuente, homogenea) con $u(\boldsymbol{x}, 0) = 0$ y cumple con (7); por lo tanto

$$0 \leq E(t) \leq E(0) = \int_V u(\boldsymbol{x}, 0)^2 d\boldsymbol{x} = 0$$

con lo cual $E \equiv 0$. Entonces $u^2 \equiv 0$ de modo que $u_1 \equiv u_2$.

[1] $I_o'(0) = 0$ es posible y, de hecho es cierto.