Facultad de Matemática, Astronomía, Física, y Computación U.N.C.

Métodos Matemáticos de la Física II — 2016

Resumen del contenido de las clases

Índice

1. 8/03/16 - Introducción

Aspectos formales, organizativos, etc.
¿Que es una ec. diferencial en derivadas parciales (ED)? Soluciones clásicas. Orden de una ED. EDs lineales. Notación $u_{xy} := \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.
Cuatro ejemplos; solución y características de esta solución: 1) $u_{xx} = 0$; 2) $u_{xx} + u = 0$; 3) $u_{xy} = 0$; y 4) $u_x - u_y = ku$.
Condiciones subsidiarias; unicidad. Inestabilidad de las ED respecto a "pequeños" cambios.
Requerimientos:

a) Derivadas parciales; Regla de la Cadena; Jacobiano

b) Gradiente y derivadas direccionales.

c) Teoría de integración multidimensional. Teoremas de Gauss, Green, Stokes.

d) Derivadas de integrales que dependen de parámetros.

e) Series infinitas y su manejo.

f) Todo el material de *Métodos Matemáticos de la Física I (2015)*; en especial ecuaciones diferenciales ordinarias.

2. 10/03/16 - Ecuación de calor/difusión

Sobre la derivación de las ec. de calor o de difusión

$$u_t = \nabla \cdot (k \nabla u) + f$$

con fuente f. Caso en el cual k es constante y sin fuente: $u_t = k\Delta u$.

Caso de una sola dimensión espacial:
Los problemas que surgen son generalmente encontrar solución (o soluciones) de la ED $u_t = ku_{xx}$ con alguna condición subsidiaria como una condición "inicial" $u(x, o) = \varphi(x)$ con dada función φ y, además, una condición de borde (o asintótica) espacial.

Método de separación de variables. Se buscan soluciones muy especiales donde las variables factorizan (se separan) $u(x, t) = X(x)T(t)$ con funciones reales X y T de una sola variable.
La ED es entonces

$$T'X = kTX''\,.$$

Descartando inmediatamente el caso trivial de $X \equiv 0$ (que es porsupuesto solución y es separable), hay x_o con $X(x_o) \neq 0$. Evaluando la ED en x_o y dividiendo por $X(x_o)$ obtienese

$$T' = k\alpha T \ , \ \ \alpha := X''(x_o)/X(x_o) \ .$$

Esta EDO de primer orden separable tiene a

$$T_\alpha(t) = ce^{k\alpha t}$$

como solución general siendo c una constante. Entonces, $T(t) \neq 0$ para cualquier t y por ende volviendo a la ED

$$X'' = \alpha X \ ;$$

Esta EDO de segundo orden tiene las sig. soluciones

$$X_\alpha(x) = \begin{cases} b_o x + a_o & , \quad \text{si } \alpha = 0 \\ a_\alpha \cos(\sqrt{|\alpha|}x) + b_\alpha \sin(\sqrt{|\alpha|}x) & , \quad \text{si } \alpha < 0 \\ a_\alpha \cosh(\sqrt{\alpha}x) + b_\alpha \sinh(\sqrt{\alpha}x) & , \quad \text{si } \alpha > 0 \end{cases} \ ,$$

donde siempre tanto a_α como b_α son constantes arbitrarias reales. Por lo tanto

$$u_\alpha(x,t) = e^{k\alpha t} X_\alpha(x) \ , \ \ \alpha \in \mathbb{R}$$

son todas las soluciones en variables separadas de la ED.
Como la ED es **lineal** la suma finita

$$u = \sum_{k=1}^{N} u_{\alpha_k} \ , \ \ \alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_N \in \mathbb{R} \ ,$$

también es solución. Más aún una serie infinita (apropiadamente convergente)

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} u_{\alpha_k} \ , \ \ \{\alpha_k : \ k = 1, 2, \cdots\} \subset \mathbb{R} \ ,$$

es solución. Incluso

$$u = \int_{\mathbb{R}} \rho(\alpha) u_\alpha \, d\alpha$$

tiene grandes posibilidades de ser solución si la función $\alpha \to \rho(\alpha)$ es lo suficientemente bien comportada para que la función u pueda derivarse bajo la integral. ¡Tenemos entonces una enorme cantidad de soluciones! La pregunta es si este universo de soluciones puede acomodar las condiciones subsidiarias (iniciales, de borde, etc.).

Ejemplo concreto: un barra de largo L cuyos extremos son mantenidos a temperatura constante e igual a 0.

$$u_t = k u_{xx} \ , \ \ 0 < x < L \quad \& \quad u(0,t) = u(L,t) = 0 \ , \text{ para todo } t > 0 \ . \tag{1}$$

Buscamos aquellas soluciones en variables separadas que cumplan con la condición de borde. El análisis inmediato (y hecho en clase) muestra que no hay tales soluciones si $\alpha \geq 0$. Para $\alpha < 0$ el análisis (hecho en clase) muestra que si (y sólo si)

$$\alpha = \alpha_n = -\frac{n^2\pi^2}{L^2} \ , \ \ n \in \mathbb{N} \text{ con } n \geq 1$$

entonces

$$u_n(x,t) = e^{-n^2\pi^2 kt/L^2} \sin(n\pi x/L)$$

es solución separable de la ED que cumple con la condición de borde.
Esto conviene verlo desde un punto de vista más abstracto. El Ansatz $u(x,t) = X(x)T(t)$ con $u(0,t) = u(L,t) = 0$ conduce inmediatamente al problema (de Sturm-Liouville)

$$X'' = \alpha X \ , \quad X(0) = X(L) = 0 \ .$$

Multiplicación de la EDO por X e integración sobre el intervalo $[0, L]$ nos da

$$\alpha \int_0^L X^2 \, dx = \int_0^L X'' x \, dx = X'X|_0^L - \int_0^L (X')^2 \, dx = -\int_0^L (X')^2 \, dx \ .$$

De modo que α es necesariamente menor que cero si $X \neq 0$. Como el operador $X \mapsto X''$ actuando sobre funciones que se anulan en los extremos es auto-adjunto (verifiquelo) respecto del producto escalar natural, los autovalores –que como vimos son negativos– son simples y las autofunciones a autovalores -distintos son ortogonales y, además, forman una base ortogonal del espacio L^2 correspondiente.

Volviendo al problema, $u = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n$ será solución del problema de contorno (1) si podemos intercambiar derivadas con la suma (e.g., si la serie es uniformemente convergente). Por ende, si nos dan además una condición inicial

$$u(x,0) = \varphi(x) \ , \quad 0 < x < L \ ,$$

y φ admite un desarrollo como serie de Fourier

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n \ , \quad a_n = (2/L) \int_0^L \varphi(x) \sin(n\pi x/L) \, dx$$

es la solución del problema. Observese que si

$$\varphi(x) = \sum_{n \geq 1} a_n \sin(n\pi x/L)$$

es absolutamente convergente entonces

$$u(x,t) = \sum_{n \geq 1} a_n e^{-n^2\pi^2 kt/L^2} \sin(n\pi x/L)$$

también lo es para $t > 0$ ya que las exponenciales que intervienen son todas < 1 cuando $t > 0$.

3. 15/03/16 - Transformación de Laplace y aplicaciones a la ec. de difusión

Ver Notas *Transformación de Laplace y primeras aplicaciones* en la w-página.

4. 17/03/16 - Transformación de Laplace y aplicaciones a la ec. de difusión

Ver Notas *Transformación de Laplace y primeras aplicaciones* en la w-página.

5. 22/03/16 - Transformación de Fourier y aplicaciones a la ec. de difusión

Transformada de Fourier de una función f a valores reales o complejos de una variable real es la función de una variable real $\widehat{f}$ definida por

$$\widehat{f}(k) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} f(x)\, dx \ , \quad k \in \mathbb{R} \ .$$

Esta es la fórmula que usaremos aunque no siempre es la más adaptada en cuanto a la distribución de signos y de factores 2π que es siempre convencial. Cuando se usan tablas de transformación de Fourier, siempre cerciorarse de cual es la convención usada.

La propiedad crucial para el uso de esta transformación en ec. diferenciales es:

$$\widehat{(f')}(k) = \cdots \text{integración por partes } \cdots = [\text{contribuciones de } \pm\infty] \ + ik \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} f(x)\, dx$$

que cuando se tiene que $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$, produce

$$\widehat{(f')}(k) = ik\widehat{f}(k) \ .$$

Luego, en general

$$\widehat{(f^{(n)})} = i^n k^n \widehat{f}$$

si las derivadas de orden $1, 2, \cdots, n-1$ decaen todas cuando $|x| \to \infty$.
Generalización a d variables reales (en $\mathbb{R}^d$):

$$\widehat{f}(\boldsymbol{k}) := (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} \exp(-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})\, f(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} \ ;$$

donde $\cdot$ denota el producto escalar canónico en $\mathbb{R}^d$: $\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{v} = \sum_{j=1}^d y_j v_j$. Entonces, bajo las condiciones de decaimiento pertinentes

$$\left(\frac{\partial^m}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_d^{\alpha_d}}\right)^{\widehat{}} f(\boldsymbol{k}) = i^m k_1^{\alpha_1} k_2^{\alpha_2}\cdots k_d^{\alpha_d}\widehat{f}(\boldsymbol{k})$$

para $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_d \in \mathbb{N}$ con $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_d = m$.

Si f es de módulo integrable, o sea $\int_{\mathbb{R}^d} |f(\boldsymbol{x})|\, d\boldsymbol{x}$ es finito, entonces $\widehat{f}$ está bien definida, es continua y acotada, y $\lim_{|\boldsymbol{k}|\to\infty} \widehat{f}(\boldsymbol{k}) = 0$. Si además f es de módulo cuadrado integrable, o sea $\int_{\mathbb{R}^d} |f(\boldsymbol{x})|^2\, d\boldsymbol{x}$ es finito, entonces $\widehat{f}$ es de módulo cuadrado integrable y vale la fórmula de inversión

$$f(\boldsymbol{x}) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \widehat{f}(\boldsymbol{k})\, d\boldsymbol{k} \ .$$

Si denotamos la transformación de Fourier alternativamente con $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}f := \widehat{f}$, tendremos

$$f(\boldsymbol{x}) = (\mathcal{F}(\mathcal{F}f))(-\boldsymbol{x}) \ .$$

Introduciendo la inversión $\mathcal{P}$ por

$$(\mathcal{P}f)(\boldsymbol{x}) := f(-\boldsymbol{x}) \ ,$$

podemos escribir $\mathcal{P}\mathcal{F}\mathcal{F} = \mathrm{id}$ donde $\mathrm{id}f = f$ es la identidad. Se verifica inmediatamente que $\mathcal{P}\mathcal{P} = \mathcal{P}^2 = \mathrm{id}$ y que $\mathcal{P}\mathcal{F} = \mathcal{F}\mathcal{P}$ de modo que $\mathcal{F}^2 = \mathcal{F}\mathcal{F} = \mathcal{P}$ y $\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}\mathcal{P} = \mathcal{P}\mathcal{F}$.

6. 29/03/16 - Principio Extremal para la ec. de difusión y consecuencias. Simetrías.

7. 31/03/16 - Comentarios (finales) sobre la ec. de difusión.

Resultado de D. Widder.

Funciones de Green y fórmula de convolución para la ec. de difusión en $\mathbb{R}^d$.

Espacio vectorial con distancia. Operadores lineales y su continuidad. Derivada de una familia mono-paramétrica de vectores. La ec. diferencial de primer orden lineal en el espacio vectorial; solución (la exponencial de un operador lineal continuo).

8. 05/04/16 - Ecuación de ondas

La ec. de ondas para desplazamientos (verticales) de una cuerda.
Ec. de ondas en muchas dimensiones espaciales ($\mathbb{R}^d$). Invariancia ante la transformación $(\boldsymbol{x}, t) \mapsto (-\boldsymbol{x}, -t)$.
Solución del caso $d = 1$ mediante transf. de variables $\xi := x + ct$, $\eta := x - ct$. $u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct)$ donde f y g son funciones C^2. Especificación de f y de g cuando se dan datos iniciales $u(x,0) = \varphi(x)$, $u_t(x,0) = \psi(x)$; fórmula de d'Alembert

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+ct) + \varphi(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s)\, ds \; .$$

Interpretación de esta fórmula. Posibilidad de considerarla como "solución" no clásica de la ec. de ondas cuando φ o ψ no son diferenciables en finitos puntos.
Ejemplo: $\psi \equiv 0$ y

$$\varphi(x) = \left\{ \begin{array}{lll} 0 & , & |x| > a \\ 1 - |x|/a & , & |x| < a \end{array} \right. \; .$$

Las características y la propagación de $u(x_o, t_o)$ para $t > t_o$.

Persistencia en el tiempo de la contribución de la velocidad inicial. Si ψ tiene soporte compacto K, dado x hay $t > 0$ lo suficientemente grande para que $K \subset (x - ct, x + ct)$ de modo que

$$\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s)\, ds = \int_K \psi(s)\, ds = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(s)\, ds \; ;$$

a partir de ese tiempo la contribución de la velocidad al valor de u en x es constante (e independiente de x). Imposibilidad de señales limpias cuando ψ no se anula.

9. 7/04/16

FALTA

10. 12/04/16

FALTA

11. 14/04/16

FALTA

12. 19/04/16 - Ecuación de ondas en 2 y 3 dimensiones espaciales

Fórmula de Poisson-Kirchhoff para ondas en 3 dimensiones espaciales. Sea u solución de

$$u_{tt} = c^2 \Delta u \ , \ \ u(\boldsymbol{x}, 0) = \varphi(\boldsymbol{x}) \ , \ \ u_t(\boldsymbol{x}, 0) = \psi(\boldsymbol{x} \ . \tag{2}$$

Puesto que tenemos una fórmula para la solución radial de la ec. de ondas en 3 dimensiones espaciales, se sugiere estudiar promedios de u en esferas de radio r y, como estos promedios son "radiales" resolver la ec. de ondas para estos promedios.

Para una función f definida en $\mathbb{R}^3$, sea

$$\overline{f}(r) := \frac{1}{4\pi r^2} \int_{S_r(\mathbf{0})} f(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_{S_1(\mathbf{0})} f(r\cos(\varphi)\sin(\theta), r\sin(\varphi)\sin(\theta), r\cos(\theta)) \ \sin(\theta) \, d\theta \, d\varphi$$

el promedio de f sobre la esfera de radio $r > 0$ alrededor de $\mathbf{0}$ denotada $S_r(\mathbf{0})$. Suponga dada la solución u del problema de Cauchy (2). Permutando la derivación temporal con la toma del promedio

$$(\overline{u})_{tt} = \overline{(u_{tt})} = c^2 \overline{\Delta u} \ .$$

Se puede demostrar que la toma del promedio conmuta con el Laplaciano, i.e.,

$$\overline{\Delta f} = \Delta \overline{f} \ ;$$

entonces obtenemos

$$\overline{u}_{tt} = c^2 \Delta \overline{u} \ , \ \ \overline{u}(r, 0) = \overline{\varphi}(r) \ , \ \ \overline{u}_t(r, 0) = \overline{\psi}(r) \ ; \tag{3}$$

un problema de Cauchy radial para el cual, aplicando la fórmula de d'Alembert (unidimensional) a

$$w(r,t) := r\overline{u}(r,t) \ ,$$

ya obtuvimos la solución

$$w(r,t) = \frac{1}{2} \left[(ct + r)\overline{\varphi}(ct + r) + (r - ct)\overline{\varphi}(|r - ct|) \right]$$

$$+ \frac{1}{2c} \int_{|r-ct|}^{r+ct} y\overline{\psi}(y) \, dy \ .$$

Observamos que $w(0,t) = 0$. Para $r \leq ct$ tenemos entonces

$$w(r,t) = \frac{1}{2} \left[(ct + r)\overline{\varphi}(ct + r) + (r - ct)\overline{\varphi}(ct - r) \right] + \frac{1}{2c} \int_{ct-r}^{r+ct} y\overline{\psi}(y) \, dy$$

$$= \frac{1}{2c} \int_{ct-r}^{r+ct} y\overline{\psi}(y) \, dy + \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{2c} \int_{ct-r}^{ct+r} y\overline{\varphi}(y) \, dy \right\} \ .$$

Ahora,

$$u(\mathbf{0},t) = \lim_{r\to 0} \overline{u}(r,t) = \lim_{r\to 0} \frac{w(r,t)-w(0,t)}{r} = w_r(0,t) \; ;$$

el cálculo de la derivada radial de w es inmediato

$$w_r(r,t) = \frac{1}{2c}\left[(r+ct)\overline{\psi}(r+ct) + (ct-r)\overline{\psi}(ct-r)\right]$$

$$+\frac{1}{2c}\frac{\partial}{\partial t}\left\{(ct+r)\overline{\varphi}(ct+r) + (ct-r)\overline{\varphi}(ct-r)\right\} \; .$$

De modo que

$$u(\mathbf{0},t) = w_r(0,t) = t\overline{\psi}(ct) + \frac{\partial}{\partial t}\left\{t\overline{\varphi}(ct)\right\} \; .$$

Con la definición del promedio obtenemos la fórmula llamada de Kirchhoff –pero debida a Poisson–

$$u(\mathbf{0},t) = \frac{1}{4\pi c^2 t}\int_{S_{ct}(\mathbf{0})} \psi(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y} + \frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{4\pi c^2 t}\int_{S_{ct}(\mathbf{0})} \varphi(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}\right\}$$

que nos da el valor de la amplitud u en el origen a tiempo $t \geq 0$. Si se quiere obtener a $u(\boldsymbol{x},t)$ basta considerar la función $g(\boldsymbol{y},t) := u(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x},t)$ que es solución de (2) pero con condición inicial $g(\boldsymbol{y},0) = \varphi(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x})$ y $g_t(\boldsymbol{y}) = \psi(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x})$; entonces aplicando la fórmula de Kirchhoff a g tenemos

$$u(\boldsymbol{x},t) = g(\mathbf{0},t) = \frac{1}{4\pi c^2 t}\int_{S_{ct}(\mathbf{0})} \psi(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x})d\boldsymbol{y} + \frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{4\pi c^2 t}\int_{S_{ct}(\mathbf{0})} \varphi(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x})d\boldsymbol{y}\right\} \; ;$$

Pero la transformación de variable $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{p} - \boldsymbol{x}$ entrega

$$\boldsymbol{y} \in S_{ct}(\mathbf{0}) \iff |\boldsymbol{p}-\boldsymbol{x}| = ct \iff \boldsymbol{p} \in S_{ct}(\boldsymbol{x})$$

de modo que

$$\boxed{u(\boldsymbol{x},t) = \frac{1}{4\pi c^2 t}\int_{S_{ct}(\boldsymbol{x})} \psi(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y} + \frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{4\pi c^2 t}\int_{S_{ct}(\boldsymbol{x})} \varphi(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}\right\}} \; .$$

Si estudiamos la ec. de ondas (2) en dos dimensiones espaciales podemos definir la función ζ de $(\boldsymbol{x},t) \in \mathbb{R}^3 \times [0,\infty)$ por

$$\zeta(x_1,x_2,x_3,t) := u(x_1,x_2,t) \; .$$

Entonces

$$\zeta_{tt} = c^2\Delta\zeta \; , \;\; \zeta(\boldsymbol{x},0) = u(x_1,x_2,0) = \varphi(x_1,x_2) \; , \;\; \zeta_t(\boldsymbol{x},0) = u_t(x_1,x_2,0) = \psi(x_1,x_2) \; .$$

La fórmula de (Poisson-) Kirchhoff aplicada a este problema espacialmente tridimensional nos da

$$u(\boldsymbol{x},t) = \zeta(\boldsymbol{x},0,t) = \frac{1}{4\pi c^2 t}\int_{S_{ct}((\boldsymbol{x},0))} \psi(y_1,y_2)d\boldsymbol{y} + \frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{4\pi c^2 t}\int_{S_{ct}((\boldsymbol{x},0))} \varphi(x_1,x_2)d\boldsymbol{y}\right\} \; .$$

Ahora

$$\begin{aligned} S_{ct}(\boldsymbol{x},0) &= \{(p_1,p_2,z) \in \mathbb{R}^3 : \, (p_1-x_1)^2 + (p_2-x_2)^2 + z^2 = c^2t^2\} \\ &= \{(\boldsymbol{p},z) \in \mathbb{R}^3 : \, z = \pm\sqrt{c^2t^2 - (p_1-x_1)^2 - (p_2-x_2)^2}\} \end{aligned}$$

$$= \{(\boldsymbol{p}, \sqrt{c^2t^2 - |\boldsymbol{p}-\boldsymbol{x}|^2}) : |\boldsymbol{p}-\boldsymbol{x}| \leq ct\} \cup \{(\boldsymbol{p}, -\sqrt{c^2t^2 - |\boldsymbol{p}-\boldsymbol{x}|^2}) : |\boldsymbol{p}-\boldsymbol{x}| \leq ct\}$$
$$= \{(\boldsymbol{p}, \sqrt{c^2t^2 - |\boldsymbol{p}-\boldsymbol{x}|^2}) : \boldsymbol{p} \in B_{ct}(\boldsymbol{x})\} \cup \{(\boldsymbol{p}, -\sqrt{c^2t^2 - |\boldsymbol{p}-\boldsymbol{x}|^2}) : \boldsymbol{p} \in B_{ct}(\boldsymbol{x})\}$$

El elemento de superficie ambos casos $z = \pm\sqrt{c^2t^2 - |\boldsymbol{p}|^2}$ es

$$d\boldsymbol{y} = \sqrt{1 + [(\partial z/\partial p_1)(\boldsymbol{p})]^2 + [(\partial z/\partial p_2)(\boldsymbol{p})]^2}\, d\boldsymbol{p} \; ;$$

o sea

$$d\boldsymbol{y} = \sqrt{1 + \frac{|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{x}|^2}{c^2t^2 - |\boldsymbol{p}-\boldsymbol{x}|^2}}\, d\boldsymbol{p} = \frac{ct}{\sqrt{c^2t^2 - |\boldsymbol{p}-\boldsymbol{x}|^2}} \; .$$

Por lo tanto, tenemos la fórmula de integración general

$$\int_{S_{ct}((\boldsymbol{x},0))} f(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y} = 2ct \int_{B_{ct}(\boldsymbol{x})} \frac{f(\boldsymbol{y})}{\sqrt{c^2t^2 - |\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|^2}}\, d\boldsymbol{y} \; ;$$

lo que nos entrega la fórmula buscada

$$\boxed{u(\boldsymbol{x}, t) = \frac{1}{2\pi c} \int_{B_{ct}(\boldsymbol{x})} \frac{\psi(\boldsymbol{y})}{\sqrt{c^2t^2 - |\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|^2}}\, d\boldsymbol{y} + \frac{\partial}{\partial t}\left\{ \frac{1}{2\pi c} \int_{B_{ct}(\boldsymbol{x})} \frac{\varphi(\boldsymbol{y})}{\sqrt{c^2t^2 - |\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|^2}}\, d\boldsymbol{y} \right\}} \; .$$

13. 21/04/16 – Ecuaciones de “potencial” (ED elípticas)

Corrección de algunos errores de la clase pasada.

a) Caso unidimensional.

b) Caso bidimensional. Si f es analítica en un abierto $D \subset \mathbb{C}$ entonces $Re(f)$ y $Im(f)$ son funciones armónicas en $D \subset \mathbb{R}^2$. Si u es armónica en un abierto $D \subset \mathbb{R}^2$ y admite una armónica conjugada v (e.g., si D es simplemente conexo) entonces $f := u + iv$ es analítica en $D \subset \mathbb{C}$. Esto abre el camino a tratar problemas de funciones armónicas en dos dimensiones a problemas de funciones analíticas.
Armónicas radiales en 2 dimensiones: $\Delta u = 0 \iff u_{rr} + u_r/r = 0$. EDO de Euler con solución

$$u(r) = a + b\ln(r) \; , \quad r > 0 \; .$$

Pero $\Delta u = 0$ solo fuera de $r = 0$. Posibilidad de trabajar $\Delta \ln(r)$ como distribución.

c) Caso tridimensional.
Armónicas radiales: $\Delta u = 0 \iff u_{rr} + 2u_r/r = 0$. EDO de Euler con solución

$$u(r) = a + b/r \; , \quad r > 0 \; .$$

Pero $\Delta u = 0$ solo fuera de $r = 0$. Posibilidad de trabajar $\Delta(1/r)$ como distribución.

d)

e) Inestabilidad ante pequeños cambios en las condiciones de borde. Si u es armónica en el semiplano superior $\{(x, y) : x \in \mathbb{R}, \; y > 0\}$ con $u(x, 0) = u_y(x, 0) = 0$ se puede demostrar que $u \equiv 0$ es la única solución. Ahora, si pedimos que u sea armónica en el mismo semiplano superior pero $u(x, 0) = 0$, $u_y(x, 0) = \epsilon \sin(x/\epsilon)$ entonces la solución es

$$u_\epsilon(x, y) = \epsilon^2 \sin(x/\epsilon) \sinh(y/\epsilon) \; .$$

Dado cualquier x que no es múltiplo entero de $\epsilon\pi$ se tiene que

$$y \mapsto u_\epsilon(x, y)$$

crece exponencialmente con y cualquiera sea $\epsilon > 0$. Pequeños cambios en la condición de borde tienen grandes consecuencias.

f) Principio extremal

g) Condiciones de borde. $V \subset \mathbb{R}^d$ con borde ∂V suave.

   1) (Dirichlet) $u = h$ en ∂V donde h es dato.
   2) (Neumann) $(\nabla u) \cdot \boldsymbol{n} = h$ en ∂V donde h es dato. Aquí, $\boldsymbol{n}$ denota la normal (unitaria) hacia afuera de V en el punto $\boldsymbol{x} \in \partial V$. Notación frecuente: $(\nabla u)\cdot \boldsymbol{n} = \partial u/\partial n$.
   3) (Mixta o de Robin) $\beta u + \alpha(\nabla u) \cdot \boldsymbol{n} = h$ en ∂V donde h, α y β son datos.

14. 26/04/16 - Funciones Armónicas (continuación)

Principio extremal (débil) para funciones armónicas (en dominios abiertos, acotados de borde suave). Consecuencias: unicidad de la solución al problema de Dirichlet para la ec. de Laplace.

Propiedad de la media esférica para funciones armónicas:

$$\boxed{u(\boldsymbol{x}) = \overline{u}(r; \boldsymbol{x}) \ , \quad r > 0 \text{ y } B_r(\boldsymbol{x}) \subset V} \ , \tag{4}$$

donde la media esférica $\overline{f}(r, \boldsymbol{x})$ de radio r alrededor de $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$ de la función f es

$$\overline{f}(r; \boldsymbol{x}) := \frac{1}{|S_r|} \int_{S_r(\boldsymbol{x})} u(\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y} \ .$$

Aquí, $|S_r|$ es el volumen de la esfera $S_r := \{\boldsymbol{x} : |\boldsymbol{x}| = r\} \subset \mathbb{R}^d$; se tiene $|S_r| = r^{d-1}|S_1|$.
Comentario: La propiedad de la media esférica es característica; si u satisface (4) y es lo suficientemente diferenciable entonces u es armónica.
Consecuencias:

a) Si u es armónica en $\mathbb{R}^d$ con $\lim_{|\boldsymbol{x}|\to\infty} u(\boldsymbol{x}) = 0$ entonces $u \equiv 0$.

b) Si $V \subset \mathbb{R}^d$ es abierto acotado de borde ∂V suave entonces

   1) El problema de Dirichlet para la ec. de Laplace tiene a lo sumo una solución.
   2) La diferencia de dos soluciones del problema de Neumann para la ec. de Laplace es constante.
   3) El problema de Robin (o mixto) $u + \alpha(\partial u/\partial n) = 0$ en ∂V donde $\alpha(\boldsymbol{x}) \geq 0$ para $\boldsymbol{x} \in \partial V$ para la ec. de Laplace tiene a lo sumo una solución.

Fórmula de Poisson para el disco en $\mathbb{R}^2$.

$$\Delta u = 0 \text{ en } B_R := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\} \ , \quad u|_{S_R} = h \ .$$

Entonces en coordenadas polares (r, φ),

$$u(r, \varphi) = \frac{R^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{h(\varphi')}{R^2 - 2Rr\cos(\varphi - \varphi') + r^2}\, d\varphi' \ .$$

Derivación por el método de variables separadas y desarrollo de h en serie de Fourier que se puede sumar con la fórmula de adición de la serie de potencias.

15. 28/04/16 - Primer parcial

16. 3/05/16 - Representación de funciones armónicas como integrales de borde

Agregado de dos comentarios sobre el Principio Extremal para funciones armónicas.
1) La hipótesis de que $V \subset \mathbb{R}^d$ sea acotado es necesaria. Ejemplo: $V = \mathbb{R}^2 \setminus B_1(\mathbf{0}) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1\}$. La función $u(x, y) = -\ln(x^2 + y^2)$ satisface $u\,|_{\partial V} = 0$ pero $u(\boldsymbol{x}) > 0$ para todo $\boldsymbol{x} \in V$.
2) Hay una versión fuerte del Principio Extremal (que se puede obtener de la propiedad de la media esférica, la desigualdad de Jensen y la compacidad de $\overline{V}$): Si $V \subset \mathbb{R}^d$ es abierto acotado y conexo de borde suave entonces para una armónica u en V (que es continua en $\overline{V}$) pero no constante

$$\min_{\partial V} u < u(\boldsymbol{x}) < \max_{\partial V} u \ , \quad \boldsymbol{x} \in V \ .$$

Partiendo de la primera identidad de Green

$$\int_V f \Delta g \, dv = -\int_V (\nabla f) \cdot (\nabla g) \, dv + \int_{\partial V} f (\partial g / \partial n) \, d\sigma$$

intercambiando f con g y restando se obtiene la segunda identidad de Green:

$$\int_V (f \Delta g - g \Delta f) \, dv = \int_{\partial V} (f(\partial g/\partial n) - g(\partial f/\partial n)) \, d\sigma \ .$$

El caso particular $f \equiv 1$ da

$$\int_V \Delta g \, dv = \int_{\partial V} (\partial g/\partial n) \, d\sigma \ .$$

Si f es una armónica sobre V que es conocida, entonces la segunda identidad de Green expresa a $f\Delta g$ como integral de borde. Tomamos para f las armónicas radiales en $\mathbb{R}^d \setminus \{\mathbf{0}\}$ que ya hemos determinado:

$$v(\boldsymbol{x}) := \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln(|\boldsymbol{x}|) & , \quad \text{si } d = 2 \\ \frac{-1}{(d-2)|S^{(d)}|} \frac{1}{|\boldsymbol{x}|^{d-2}} & , \quad \text{si } d \geq 3 \end{cases} \ , \quad \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0} \ .$$

Las constantes elegidas son convencionales. $|S^d|$ denota el volumen de la esfera $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d : |\boldsymbol{x}| = 1\}$ que es $2\pi^{d/2}/\Gamma(d/2)$; en nuestra notación usual $|S^d| = |S_1(\mathbf{0})|$ pero ahora se remarca la dependencia de la dimensión d. Se tiene

$$|S_r(\boldsymbol{a})| = r^{d-1} |S^d| \ , \quad |B_r(\boldsymbol{a})| = r^d |S^d| / d \ ,$$

cualquiera sea el vector $\boldsymbol{a}$ del centro.

Dado $\boldsymbol{\xi} \in V$, consideramos la traslación de v por $\boldsymbol{\xi}$

$$v_{\boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{x}) = v(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}) = (T_{\boldsymbol{\xi}} v)(\boldsymbol{x}) \ , \quad \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{\xi} \ .$$

Ya que Δ conmuta con cualquier traslación,

$$\Delta v_{\boldsymbol{\xi}} = 0 \ , \quad \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{\xi} \ .$$

Para mitigar la singularidad en $\boldsymbol{\xi}$ consideramos un $\rho > 0$ lo suficientemente chico tal que $B_\rho(\boldsymbol{\xi}) \subset V$ (la bola de radio ρ alrededor de ξ cabe en V que es abierto) y consideramos

$$V_\rho = V \setminus B_\rho(\boldsymbol{\xi})$$

con borde

$$\partial V \cup S_\rho(\boldsymbol{\xi}) \ .$$

La aplicación de la segunda identidad de Green da

$$\int_{V_\rho} v_{\boldsymbol{\xi}} \Delta u \, dv = \int_{\partial V_\rho} \left[v_{\boldsymbol{\xi}} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v_{\boldsymbol{\xi}}}{\partial n} \right] \, d\sigma \ ; \tag{5}$$

y aquí queremos recuperar V haciendo el límite $\rho \to 0^+$. Recordando que el elemento de volumen en coordenadas radiales es de la forma $dv = r^{d-1} \, dr \, d\Omega$ observamos que $v_{\boldsymbol{\xi}}$ es integrable sobre V de modo que

$$\lim_{\rho \to 0^+} \int_{V_\rho} v_{\boldsymbol{\xi}} \Delta u \, dv = \int_V v_{\boldsymbol{\xi}} \Delta u \, dv \ . \tag{6}$$

El miembro derecho de (5) tiene dos contribuciones:

$$\int_{\partial V} \left[v_{\boldsymbol{\xi}} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v_{\boldsymbol{\xi}}}{\partial n} \right] \, d\sigma + \int_{S_\rho(\boldsymbol{\xi})} \left[v_{\boldsymbol{\xi}} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v_{\boldsymbol{\xi}}}{\partial n} \right] \, d\sigma \ ;$$

la primera es independiente de ρ y calculamos el límite de la segunda en lo que sigue. Para $\boldsymbol{x} \in S_\rho(\boldsymbol{\xi})$, se tiene $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}) = -(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi})/\rho$ y $\frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial r}$ donde $r = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}|$. Consideramos $d \geq 3$ dejando el caso bi-dimensional para el lector. Ya que

$$v_{\boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{x}) = \frac{-1}{(d-2)|S^{(d)}|} \frac{1}{r^{d-2}} \ , \quad \frac{\partial v_{\boldsymbol{\xi}}}{\partial r}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{|S^d| r^{d-1}} = \frac{1}{|S_r(\boldsymbol{\xi})|} \ ;$$

obtenemos, sucesivamente,

$$\int_{S_\rho(\boldsymbol{\xi})} v_{\boldsymbol{\xi}} \frac{\partial u}{\partial n} \, d\sigma = \frac{-1}{(d-2)|S^d| \rho^{d-2}} \int_{S_\rho(\boldsymbol{\xi})} \frac{\partial u}{\partial n} \, d\sigma = \frac{\rho^2}{d(d-2)} \frac{1}{|B_\rho(\boldsymbol{\xi})|} \int_{B_\rho(\boldsymbol{\xi})} \Delta u \, dv$$

donde usamos el caso particular de la segunda identidad de Green (teniendo en cuenta que $\boldsymbol{n}$ es la normal interior a $B_\rho(\boldsymbol{\xi})$); y

$$\int_{S_\rho(\boldsymbol{\xi})} u \frac{\partial v_{\boldsymbol{\xi}}}{\partial n} \, d\sigma = -\frac{1}{|S_\rho(\boldsymbol{\xi})|} \int_{S_\rho(\boldsymbol{\xi})} u \, d\sigma \ .$$

Ahora, si f es función continua sobre V entonces

$$\lim_{\rho \to 0^+} \frac{1}{|S_\rho(\boldsymbol{\xi})|} \int_{S_\rho(\boldsymbol{\xi})} f \, d\sigma = f(\boldsymbol{\xi}) \ , \quad \lim_{\rho \to 0^+} \frac{1}{|B_\rho(\boldsymbol{\xi})|} \int_{B_\rho(\boldsymbol{\xi})} f \, dv = f(\boldsymbol{\xi}) \ .$$

De modo que

$$\lim_{\rho \to 0^+} \int_{S_\rho(\boldsymbol{\xi})} v_{\boldsymbol{\xi}} \frac{\partial u}{\partial n} \, d\sigma = \lim_{\rho \to 0^+} \frac{\rho^2}{d(d-2)} \frac{1}{|B_\rho(\boldsymbol{\xi})|} \int_{B_\rho(\boldsymbol{\xi})} \Delta u \, dv = \lim_{\rho \to 0^+} \frac{\rho^2 (\Delta u)(\boldsymbol{\xi})}{d(d-2)} = 0 \, , \tag{7}$$

y

$$\lim_{\rho \to 0^+} \int_{S_\rho(\boldsymbol{\xi})} u \frac{\partial v_{\boldsymbol{\xi}}}{\partial n} \, d\sigma = \lim_{\rho \to 0^+} \frac{-1}{|S_\rho(\boldsymbol{\xi})|} \int_{S_\rho(\boldsymbol{\xi})} u \, d\sigma = -u(\boldsymbol{\xi}) \ . \tag{8}$$

Entonces usando (6,7,8) en (5) obtenemos

$$\boxed{u(\boldsymbol{\xi}) = \int_V v_{\boldsymbol{\xi}} \, \Delta u \, dv - \int_{\partial V} \left[v_{\boldsymbol{\xi}} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v_{\boldsymbol{\xi}}}{\partial n} \right] \, d\sigma} \ , \tag{9}$$

lo que expresa el valor de u en un punto arbitrario $\boldsymbol{\xi} \in V$ en terminos de los valores del Laplaciano de u en V y los valores de u y de $\partial u / \partial n$ en el borde ∂V de V. Si en lo recién hecho reemplazamos a v_ξ por $G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) := v_{\boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{x})+\Phi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$ donde la función $V \ni \boldsymbol{x} \mapsto \Phi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$ es armónica para todo $\boldsymbol{\xi} \in V$ y continua en $\overline{V}$, obtenemos del mismo modo[1]

$$u(\boldsymbol{\xi}) = \int_V G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})\,(\Delta u)(\boldsymbol{x})\,dv - \int_{\partial V} \left[G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)(\boldsymbol{x}) - u(\boldsymbol{x})\left(\frac{\partial G}{\partial n}\right)(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})\right] d\sigma\ .$$

Si también se cumple $\Phi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) = -v_{\boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{x})$ para $\boldsymbol{x} \in \partial V$, o sea $G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) = 0$ para $\boldsymbol{x} \in \partial V$, entonces tenemos

$$u(\boldsymbol{\xi}) = \int_V G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})\,(\Delta u)(\boldsymbol{x})\,dv + \int_{\partial V} u(\boldsymbol{x})\left(\frac{\partial G}{\partial n}\right)(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})\,d\sigma\ . \tag{10}$$

G es la denominada función de Green (del Laplaciano en V) y $\partial G/\partial n$ se denomina el nucleo de Poisson (para el Laplaciano en V). Si u es solución del problema de Dirichlet para la ecuación de Poisson

$$\Delta u = f \text{ en } V \text{ con } \ u|_{\partial V} = h\ ,$$

entonces (10) es

$$u(\boldsymbol{\xi}) = \int_V G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})\,f(\boldsymbol{x})\,dv + \int_{\partial V} h(\boldsymbol{x})\left(\frac{\partial G}{\partial n}\right)(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})\,d\sigma\ . \tag{11}$$

Y, vice versa, (11) es solución del problema de Dirichlet para la ecuación de Poisson.

El Laplaciano con condiciones de borde homogeneas de Dirichlet, Neumann o Robin es auto-adjunto (aplicación de la segunda identidad de Green).

17. 5/05/16 - Funciones de Green I

Dos métodos para obtener funciones de Green. El directo via solución del problema $\Delta\Phi = 0$ en V con $\Phi|_{\partial V} = -v_{\boldsymbol{\xi}}$ que admite a lo sumo una sola solución. El método distribucional que plantea que

$$\Delta G(\cdot,\boldsymbol{x}) = \delta_{\boldsymbol{x}}\ ,\ \ G(\cdot,\boldsymbol{x})|_{\partial V} = 0\ .$$

18. 10/05/16 - Distribuciones

19. 12/05/16 – Funciones de Green II y Laplaciano

Función de Green para el Laplaciano con condición de Dirichlet. Construcción y propiedades.

Funciones de Green para la ec. de ondas.

Funciones de Riemann para la ec. de ondas.

Funciones armónicas en variables separadas; coordenadas cartesianas y polares en $d = 2$; coordenadas cartesianas y cilíndicas en $d = 3$.

[1]
$$\lim_{\rho\to 0^+}\int_{S_\rho(\boldsymbol{\xi})}[\Phi(\partial u/\partial n) - u(\partial\Phi/\partial n)]\,d\sigma = -\lim_{\rho\to 0^+}\int_{B_\rho(\boldsymbol{\xi})}\Phi\Delta u\,dv = 0\ .$$

20. 17/05/16 –

21. 19/05/16 – Clasificación de ec. diferenciales de segundo orden. Carcaterísticas. Formas canónicas.

22. 24/05/16 – Características para ec. hiperbólicas y parabólicas

23. 31/05/16 – Elementos de la teoría de probabilidades

Espacio muestral (modelo conjuntista) y eventos. Eventos mutuamente excluyentes. Frecuencia relativa de un evento; propiedades.
Idealización: Probabilidad o distribución de probabilidad en un espacio muestral S; $0 \leq P(A) \leq 1$ para $A \subset S$, $P(S) = 1$, $P(\cup_{j=1}^{n} A_j) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j)$ para toda familia $\{A_j\}$ de eventos mutuamente excluyentes dos-a-dos. Consecuencias: $P(\emptyset) = 0$, $P(A^c) = 1 - P(A)$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Ejercicio: $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$.
Probabilidad condicional; motivación y ejemplos. Definición $P(B|A) = P(A \cap B)/P(A)$ si $P(A) > 0$. Para $A \subset S$ fijo con $P(A) > 0$ el mapa $S \ni B \mapsto P(B|A)$ es una probabilidad.
Partición de S en eventos mutuamente excluyentes $\{B_j : j \in J\}$: $S = \cup_{j \in J} B_j$ y $P(B_j) > 0$. Entonces, $P(A) = \sum_{j \in J} P(A|B_j)P(B_j)$. Ejemplos.

24. 2/06/16 – T. de Bayes; independencia; variables aleatorias

T. de Bayes: si $\{B_j : j \in J\}$ es partición entonces

$$P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j)P(B_j)}{\sum_{k \in J} P(A|B_k)P(B_k)} \ .$$

Ejemplo: dos tipos de cajas con distintas frecuencias relativas de dos tipos de caramelos. ¿Que puedo decir de la caja si pruebo un sólo caramelo?
Eventos independientes; para dos, $P(A \cap B) = P(A)P(B)$; para 3 eventos; en general $\{A_j : j = 1, 2, \cdots, N\}$ son independientes ($N \geq 2$)

$$P(\bigcap_{j \in K} A_j) = \prod_{j \in K} P(A_j) \ , \ \text{ cualquiera sea el subconjunto } K \subset \{1, 2, \cdots, N\} \text{ con } |K| \geq 2 \ .$$

Variables aleatorias 'Magnitud que toma valores reales para la cual se tiene información probabilística sobre su comportamiento'. Ejemplos (extraidos del lanzamiento de dos dados). Función distribución de probabilidad o distribución acumulativa F de una variable aleatoria ξ

$$F(x) = \text{Prob}(\{\xi \leq x\}) \ , \ \ x \in \mathbb{R} \ .$$

F es:

a) no-negativa o sea $F(x) \geq 0$;

b) no-decreciente o sea $F(x_1) \leq F(x_2)$ si $x_1 \leq x_2$ ($\{\xi \leq x_1\} \subset \{\xi \leq x_2\}$ si $x_1 < x_2$ implica $\mathrm{Prob}(\{\xi \leq x_1\}) \leq \mathrm{Prob}(\{\xi \leq x_2\})$);

c) $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ y $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$.

Además,

$$\mathrm{Prob}(\{\xi \leq x\}^c) = \mathrm{Prob}(\{\xi > x\}) = 1 - F(x) \; ; \tag{12}$$

y

$$\mathrm{Prob}(\{x_1 < \xi \leq x_2\}) = F(x_2) - F(x_1) \; . \tag{13}$$

Ya que

$$\{x_1 < \xi \leq x_2\} = \{x_1 < \xi\} \cap \{\xi \leq x_2\}$$

de modo que

$$\mathrm{Prob}(\{x_1 < \xi \leq x_2\}) = \mathrm{Prob}(\{x_1 < \xi\} \cap \{\xi \leq x_2\})$$
$$= \mathrm{Prob}(\{x_1 < \xi\}) + \mathrm{Prob}(\{\xi \leq x_2\}) - \mathrm{Prob}(\{x_1 < \xi\} \cup \{\xi \leq x_2\}) \; ;$$

pero ya que

$$\{x_1 < \xi\} \cup \{\xi \leq x_2\}) = (x_1, \infty) \cup (-\infty, x_2] = \mathbb{R}$$

se tiene $\mathrm{Prob}(\{x_1 < \xi\} \cup \{\xi \leq x_2\}) = 1$ y de todo esto se desprende (13).
Como se vió en el análisis de la función distribución acumulativa en los ejemplos discretos está resulta continua desde la derecha. Esto nos lleva a la defínción: Una función distribución acumulativa es una función F a valores reales de una variable real que cumple con las tres condiciones a),b), c) y además

d) F es continua desde la derecha.

En caso de una variable aleatoria ξ que toma $M \geq 2$ valores $\{x_j : j = 1, 2, \cdots, M\}$ con probabilidad p_j cada uno la función de distribución acumulativa se puede expresar inmediatamente si enumeramos los valores posibles de menor a mayor ($x_1 < x_2 < \cdots < x_M$)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad \text{si } x < x_1 \\ \sum_{k=1}^{j-1} p_k & , \quad \text{si } x_{j-1} \leq x < x_j \text{ para } j = 2, 3, \cdots, M \\ 1 & , \quad \text{si } x_M \leq x \end{cases} \quad .$$

Se tiene[2]

$$\mathrm{Prob}(\{\xi = x\}) = F(x) - F(x^-) \; , \quad F(x^-) = \sup_{y<x} F(y) \; .$$

Dada una función de distribución acumulativa cualquiera que tiene un número finito K de discontinuidades (necesariamente desde la izquierda) en $s_1, s_2, \cdots, s_K$, esta función es la función de distribución acumulativa de una variable aleatoria que toma finitos valores discretos $\{s_j : j = 1, 2, \cdots, K\}$ con probabilidades $p_j = F(s_j) - \sup_{y<s_j} F(y)$, $j = 1, 2, \cdots, K$.

Ejemplo: Para $\lambda > 0$

$$F_\lambda(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \leq 0 \\ 1 - \exp(-x/\lambda) & , \quad x > 0 \end{cases} \quad ,$$

[2]La continuidad desde la derecha con la propiedad de crecimiento b) de F implican que $F(x) = \lim_{y\to x\,,\,y>x} = \inf_{y>x} F(y)$ mientras que $F(x) \geq \lim_{y\to x\,,\,y<x} F(y) = \sup_{y<x} F(y)$.

es una función de distribución acumulativa continua. Es diferenciable salvo en $x = 0$ con derivada

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ \exp(-x/\lambda)/\lambda & , \quad x > 0 \end{cases} \quad .$$

Esta distribución llamada exponencial se estudiará más adelante.

Ejemplo: La función error complementaria

$$\operatorname{erfc}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2}\, dt$$

es una función distribución acumulativa continua y diferenciable con

$$\operatorname{erfc}'(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$$

–la gaussiana normalizada– que tiene un rol fundamental en toda la teoría de probabilidades (Teorema central del límite).