Métodos Matemáticos de la Física II

Solución[1] del Problema 3, Guía 3

Problema 3: Encontrar las 3 frecuencias de oscilación más bajas de un parche de tambor en forma de triángulo isósceles recto de lados a, a y $a\sqrt{2}$.

Antes de proceder conviene aclarar eso de "oscilación" del enunciado. Se trata de lo que también suele llamarse **modo**, i.e. una solución en variables separadas de la ec. de ondas

$$u_{tt} = c^2 \Delta u \ , \ \ x \in V \subset \mathbb{R}^d \ , \ \ t \geq 0$$

en una región d-dimensional V con una condición de contorno (adecuada) homogenea para u en ∂V. Estos modos resultan ser de la forma

$$u(\boldsymbol{x}, t) = y(\boldsymbol{x}) h_\omega(t)$$

donde h_ω es una función armónica de frecuencia angular $\omega > 0$ (eventualmente ω puede anularse), o sea $h_\omega(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$, y la función espacial y satisface

$$\Delta y = -(\omega^2/c^2)\, y \ , \ \text{en } V \text{ con la misma condición sobre } y \text{ en } \partial V \ .$$

El número no-positivo $-\omega^2/c^2$ es entonces un autovalor del Laplaciano en V con la condición de borde especificada y y es una autovector a dicho autovalor. Inversamente si λ es un autovalor del Laplaciano con la condición de borde especificada, y y es un autovector correspondiente entonces $\lambda \leq 0$ y yh_ω es un modo de frecuencia $\omega = c\sqrt{|\lambda|}$. Con este lenguaje el problema planteado pide determinar los tres modos de menor frecuencia para la ec. de ondas en el triángulo con condición de Dirichlet en el perímetro. En otras palabras: se buscan los tres autovalores de menor módulo del Laplaciano actuando en el triángulo con condición de Dirichlet en el perímetro. En lo que sigue reducimos esto a un problema en un cuadrado mediante el uso de una simetría.

Primer paso: Reducción a un problema de un cuadrado

Este problema nos da un buen ejemplo del uso de simetrías. Junto con el triángulo en cuestión consideramos el cuadrado de lado a. La idea es reducir el problema "triangular" al problema "cuadrado". Elegimos como nuestro triángulo a

$$\mathcal{T}_a := \{(x, y) : \ 0 \leq x \ , \ \ 0 \leq y \leq x\} \subset \mathbb{R}^2 \ .$$

El cuadrado será –por supuesto–

$$\mathcal{C}_a := \{(x, y) : \ 0 \leq x \leq a \ , \ \ 0 \leq y \leq a\} \ .$$

Observo que $\mathcal{T}_a \subset \mathcal{C}_a$ y llamo $\mathcal{T}_a'$ a lo que es casi el complemento de $\mathcal{T}_a$ en $\mathcal{C}_a$

$$\mathcal{T}_a' := \{(x, y) : \ 0 \leq x \leq y \ , \ \ 0 \leq y \leq a\} \ .$$

[1] G.A. Raggio

'Casi', por que la diagonal $\delta := \{(x,x) : 0 \le x \le a\}$ está incluida en $\mathcal{T}_a$ y en $\mathcal{T}_a'$.
Con la transformación $\sigma(x,y) := (y,x)$ definida en $\mathbb{R}^2$ obtenemos una biyección de $\mathcal{C}_a$ que es su propia inversa ($\sigma \circ \sigma =$ id), que satisface $\sigma(\mathcal{T}_a) = \mathcal{T}_a'$ así como $\sigma(\delta) = \delta$. Para una función f definida en $\mathcal{C}_a$ a valores complejos defino

$$(Sf)(x,y) := f(\sigma(x,y)) = f(y,x) \ , \quad (x,y) \in \mathcal{C}_a \ .$$

Supongamos que la función f admite derivadas parciales con respecto a ambas variables; llamamos f_j a la derivada parcial respecto de la j-ésima variable. Entonces

$$(Sf_j)(x,y) = f_j(y,x) \ , \quad j = 1, 2 \ ;$$

mientras que

$$\begin{aligned}(Sf)_1(x,y) &= \lim_{h\to 0} \frac{(Sf)(x+h,y) - (Sf)(x,y)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(y,x+h) - f(y,x)}{h} = f_2(y,x) = (Sf_2)(x,y) \ ,\end{aligned}$$

y similarmente $(Sf)_2 = Sf_1$. Con la notación usual (que es bastante confusa a veces)

$$\frac{\partial}{\partial x} S = S \frac{\partial}{\partial y} \ .$$

Como $S \circ S = S^2 =$ id esta relación resulta equivalente a cualquiera de las siguientes

$$S\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} S \ , \quad S\frac{\partial}{\partial x} S = \frac{\partial}{\partial y} \ , \quad S\frac{\partial}{\partial y} S = \frac{\partial}{\partial x} \ .$$

En todo caso para el Laplaciano (actuando sobre funciones definidas sobre $\mathbb{R}^2$ o solamente sobre $\mathcal{C}_a$) se tiene

$$S\Delta = \Delta S \ .$$

Supongase primeramente que $v(\boldsymbol{x},t) = y(\boldsymbol{x}) h_\omega(t)$ es un modo para la ec. de ondas en $\mathcal{C}_a$ con condición de Dirichlet en $\partial\mathcal{C}_a$. Si consideramos a v como función definida en $\mathcal{T}_a$ (ya que $\mathcal{T}_a \subset \mathcal{C}_a$) entonces se satisface la ec. de ondas en $\mathcal{T}_a$ pero $v|_{\partial\mathcal{T}_a}$ no es necesariamente nula ya que $v|_\delta$ no es necesariamente nula. Pero si además de $v|_{\partial\mathcal{C}_a} = 0$ también $v|_\delta = 0$ entonces v es un modo de la ec. de ondas en $\mathcal{T}_a$ con condición de Dirichlet.
Inversamente, si $u(\boldsymbol{x},t) = z(\boldsymbol{x}) h_\omega(t)$ es un modo de la ec. de ondas en $\mathcal{T}_a$ con condición de Dirichlet, sea

$$v := \begin{cases} u & , \quad (x,y) \in \mathcal{T}_a \\ (Sz)h_\omega & , \quad (x,y) \in \mathcal{T}_a' \end{cases} \ .$$

Observando que si $(x,y) \in \mathcal{T}_a'$ entonces $\sigma(x,y) = (y,x) \in \mathcal{T}_a$ y $(Sz)(x,y) = z(y,x)$ y $\Delta Sz = S\Delta z = (-\omega^2/c^2)Sz$ vemos que v satisface la ec. ondas en $\mathcal{C}_a \setminus \delta$ y con algo más de trabajo se ve que la ED también se cumple en δ. Ahora, ya que $z|_\delta = 0$ por la condición de Dirichlet, obtenemos $v|_\delta = 0$.
Hemos demostrado que hay una correspondencia biunívoca entre modos (de Dirichlet) de $\mathcal{T}_a$ y modos (de Dirichlet) de $\mathcal{C}_a$ que se anulan en δ.

Para completar la reducción usamos la misma simetría para localizar modos de $\mathcal{C}_a$ que se anulan en δ. Suponga que w es un autovector al autovalor λ del Laplaciano en $\mathcal{C}_a$ con condición de

Dirichlet. Entonces $\Delta S w = S\Delta w = S(\lambda w) = \lambda S w$ y $(Sw)|_{\partial \mathcal{C}_a} = 0$ pues $\sigma(\partial \mathcal{C}_a) = \partial \mathcal{C}_a$ (no puntualmente pero como conjunto). Por lo tanto siendo que la ED es lineal y la condición de Dirichlet es homogenea, junto con w tanto Sw como

$$w_{\pm} := \frac{1}{2}(\ \mathrm{id} \pm S)w$$

son autovectores al mismo autovalor siempre y cuando no sean nulos. De $w \neq 0$ obtenemos $Sw \neq 0$ de modo que $w_{\pm} = 0$ es equivalente a $Sw = \mp w$. Ahora, siempre se tiene

$$w_{-}(x,x) = \frac{1}{2}(w(x,x) - (Sw)(x,x)) = 0\ ,$$

o en otras palabras $w_{-}|_{\delta} = 0$. Por lo tanto: para encontrar los modos de Dirichlet de $\mathcal{C}_a$ que se anulan en δ basta encontrar los autovalores (del Laplaciano) en $\mathcal{C}_a$ que admiten un autovector w para el cual $w_{-} \neq 0$ (equivalentemente $Sw \neq w$). En resumen: *Los modos de la ec. de ondas en $\mathcal{T}_a$ con condición de Dirichlet están dados por los autovalores λ del Laplaciano en $\mathcal{C}_a$ con condición de Dirichlet para los cuales hay un autovector w de modo que $w(x,y) \neq w(y,x)$.*

Segundo paso: Modos "diagonales" de $\mathcal{C}_a$
Trabajamos en $\mathcal{C}_a$ y buscamos autovalores λ (sabemos que son negativos) que admiten autovectores u con $u(x,y) = X(x)Y(y)$. En tal caso, la ec. de autovalores $\Delta XY = \lambda XY$ nos da que

$$X'' = \lambda_1 X\ ,\ \ Y'' = \lambda_2 Y\ ,\ \ \lambda = \lambda_1 + \lambda_2\ .$$

con condición de bordes

$$X(0) = X(a) = 0\ ,\ \ Y(0) = Y(a) = 0\ ,$$

de modo que tanto λ_1 como λ_2 son autovalores del problema –unidimensional– de Dirichlet

$$Z'' = \mu Z\ ,\ \ Z(0) = Z(a) = 0$$

en el intervalo $[0,a]$. La solución es bien conocida; los autovalores son los números $\mu_n := -n^2\pi^2/a^2$ con $n = 1, 2, \cdots$. Estos autovalores son simples (o sea no degenerados; o bien de multiplicidad uno) con autofunciones $z_n(x) = \sin(n\pi x/a)$. La familia $\{z_n : n = 1, 2, \cdots\}$ de estas autofunciones es linealmente independiente y completa.
Entonces, $\lambda_{n,m} := \mu_n + \mu_m$ son autovalores del Laplaciano de Dirichlet de $\mathcal{C}_a$ para $n, m \in \{1, 2, 3, \cdots\}$ con autofunciones $u_{n,m}$ y $u_{m,n}$ donde

$$u_{n,m}(x,y) := z_n(x) z_m(y)\ ,\ \ (x,y) \in \mathcal{C}_a\ .$$

¿Son estos todos los autovalores del Laplaciano de Dirichlet en $\mathcal{C}_a$? La respuesta es positiva y consecuencia de que $\{u_{n,m} :\ n, m \in \{1, 2, 3, \cdots\}\}$ es una familia de funciones sobre $\mathcal{C}_a$ que son linealemente independientes y completa[2]. Los modos de $\mathcal{C}_a$ con condición de Dirichlet tienen frecuencias angulares $\{\omega_{n,m} := c\sqrt{|\lambda_{n,m}|};\ n, m \in \{1, 2, 3, \cdots\}\}$.

[2] Si $\{f_j : j \in J\}$ es una familia de funciones linealmente independiente y completa sobre el intervalo I_1 y $\{g_k : k \in K\}$ es una familia de funciones linealmente independiente y completa sobre el intervalo I_2 entonces definiendo $\phi_{j,k}(x,y) = f_j(x) g_k(y)$ para $(x,y) \in I_1 \times I_2$ con $j \in J$ y $k \in K$, la familia $\{\phi_{j,k} : j \in J\ ,\ k \in K\}$ es linealmente independiente y completa en $I_1 \times I_2$.

No queremos entrar en la discusión de la multiplicidad de los autovalores $\lambda_{n,m}$. Baste decir que $\lambda_{n,n} = -2n^2\pi^2/a^2$ son autovalores simples mientras que la multiplicidad de $\lambda_{n,m}$ para $n \neq m$ es complicada aunque seguramente mayor o igual a 2. Se tiene, por ejemplo, $\lambda_{1,8} = \lambda_{4,7} = -65\,\pi^2/a^2$ de modo que este autovalor es cuadruple.

Ya que $Su_{n,m} = u_{m,n}$, el criterio desarrollado en el apartado anterior implica que para $m \neq n$ el autovalor $\lambda_{n,m}$ admite un autovector u con $Su \neq u$ (en efecto: $u_{m,n} \neq u_{n,m}$ si $n \neq m$); mientras que $Su_{n,n} = u_{n,n}$. De manera que los modos de $\mathcal{T}_a$ tienen frecuencias $\{\omega_{n,m} : n, m \in \{1, 2, 3, \cdots\},\ n \neq m\}$. Es inmediato ver que los tres modos de menor frecuencia son aquellos de frecuencias $\omega_{1,2} = (c\pi/a)\sqrt{5}$, $\omega_{1,3} = (c\pi/a)\sqrt{10}$, y $\omega_{2,3} = (c\pi/a)\sqrt{13}$; todos ellos simples con autofunción $u_{n,m} - u_{m,n}$.

Lineas nodales Cuando el autovalor asociado a un modo es simple (no degenerado) podemos hablar de nodos de ese modo; se trata de los ceros de cualquier autofunción asociada al autovalor (las autofunciones son proporcionales entre si)[3]. En el caso presente, para el modo de frecuencia $\omega_{n,m}$, $n \neq m$, las lineas nodales están determinadas por $\{(x, y) \in \mathcal{T}_a :\ u_{n,m}(x, y) = u_{m,n}(x, y)\}$. Para el modo fundamental $\omega_{1,2}$,

$$0 = u_{1,2}(x, y) - u_{2,1}(x, y) = \sin(\pi x/a)\sin(2\pi y/a) - \sin(\pi y/a)\sin(2\pi x/a)$$

$$= 2\sin(\pi x/a)\sin(\pi y/a)[\cos(\pi y/a) - \cos(\pi x/a)]\ ;$$

de donde se obtiene las lineas nodales asociadas al perímetro de $\mathcal{T}_a$:

$$\sin(\pi x/a) = 0 \iff x = 0\ ,\ \ x = a\ ;\ \ \sin(\pi y/a) = 0 \iff y = 0\ ,\ \ y = a\ ;$$

y

$$\cos(\pi x/a) = \cos(\pi y/a) \iff x = y\ mod\ 2\pi \iff x = y\ .$$

El modo fundamental (de frecuencia menor) no tiene nodos fuera de los exigidos por la condición de borde de Dirichlet. Para el siguiente modo $\omega_{1,3}$

$$0 = u_{1,3}(x, y) - u_{3,1}(x, y) = \sin(\pi x/a)\sin(3\pi y/a) - \sin(\pi y/a)\sin(3\pi x/a)$$

$$= 4\sin(\pi x/a)\sin(\pi y/a)[\sin(\pi x/a)^2 - \sin(\pi y/a)^2]\ .$$

Aquí, además del perímetro de $\mathcal{T}_a$ (obtenido de $\sin(\pi x/a) = 0$, $\sin(\pi ya) = 0$ y de $x = y$) se tiene una linea nodal determinada por

$$|\sin(\pi x/a)| = |\sin(\pi y/a)|\ ,\ x \neq y \iff y = \pi - x\ ,\ 0 \leq x \leq a\ ;$$

esta es la bisectriz del ángulo recto del triángulo $\mathcal{T}_a$. Para el tercer modo $\omega_{2,3}$

$$0 = u_{2,3}(x, y) - u_{3,2}(x, y) = \sin(2\pi x/a)\sin(3\pi y/a) - \sin(2\pi y/a)\sin(3\pi x/a)$$

$$= 2\sin(\pi x/a)\sin(\pi y/a)[3(\cos(\pi x/a) - \cos(\pi y/a))$$

$$+4(\cos(\pi y/a)\sin(\pi x/a)^2 - \cos(\pi x/a)\sin(\pi y/a)^2)]$$

$$= 2\sin(\pi x/a)\sin(\pi y/a)[\cos(\pi y/a) - \cos(\pi x/a)][1 + 4\cos(\pi x/a)\cos(\pi y/a)]\ .$$

[3]En el caso de un modo degenerado hay que especificar la autofunción para hablar de nodos y estos están asociados a la autofunción y no al modo.

El perímetro de $\mathcal{T}_a$ se obtiene a partir de los ceros de los primeros tres factores. El último factor define con

$$\cos(\pi x/a)\cos(\pi y/a) = -1/4\ ,\ (x,y) \in \mathcal{T}_a\ ,$$

una linea nodal que, con la inversa del coseno en el intervalo $[0,\pi]$, se determina a

$$y = \frac{a}{\pi}\ \arccos\left(\frac{-1}{4\cos(\pi x/a)}\right)\ ,\ \ \frac{a}{\pi}\arccos(-1/4) \le x \le a\ .$$