

Resumen del contenido de clases de *Métodos Matemáticos de la Física II*, 1^{er}-cuatrimestre 2015

G.A. Raggio*

Índice

1. 10/03: Introducción	2
2. 12/03: Ecuación de difusión (o calor)	3
3. 17/03: Principio extremal para la ec. de difusión y consecuencias. Transformación de Laplace.	5
4. 19/03: Transformación de Laplace (continuación)	9
5. 26/03: Difusión en todo el espacio; Transformación de Fourier; Simetrías (y representación de grupos)	11
6. 7/04: Ec.de dif. (fin); Simetrías II	16
7. 9/04: Simetrías III. Ecuación de ondas	19
8. 14/04: Separación de variables, Transf. de Laplace y de Fourier para la ec. de ondas. Problema de Cauchy (unicidad)	20
9. 16/04: Propiedades cualitativas de la ec. de ondas (1 dimensión espacial); características; fórmula de d'Alembert para la ec. inhomogenea. Producto escalar en \mathbb{R}^d y vectorial en $d = 3$	22
10. 21/04: Ec. de ondas en d dimensiones espaciales. Principio de Huygens	23
11. 23/04: La ec. de ondas en $d = 2, 3$ dimensiones espaciales. Demostración de la fórmula de Poisson (Kirchhoff). Principio de Huygens	25
12. 24/04: Ecuaciones de potencial (Poisson, Laplace); funciones armónicas. Problemas de Dirichlet, Neumann y Robin. Principio Extremal.	26
13. 28/04: Unicidad en el problema de Dirichlet. Problema de Dirichlet para el disco, fórmula de Poisson.	27
14. 30/04: Motivaciones hacia las distribuciones. Segunda identidad de Green y fórmula de representación de Green para el problema de Dirichlet de la ecuación de Poisson.	28
15. 7/05: Distribuciones.	28
16. 12/05: Funciones de Green I (Laplaciano)	28
17. 14/05: Funciones de Green II	31

*FaMAF, Universidad Nacional de Córdoba.

18.19/05: Armónicas que separan en coordenadas esféricas (Funciones esféricas)	31
19.21/05: Problemas de autovalores. Sobre todo para Δ . Funciones de Bessel	31
20.02/06: Clasificación y tipología de las EDP de segundo orden lineales; superficies características; formas canónicas	34
21.04/06: Variables aleatorias; distribución (y densidad); medias (expectaciones)	34
22.16/06: Distribuciones particularmente importantes: Normal, binomial y de Poisson	37
23.18/06: Leyes de grandes números	38

1. 10/03: Introducción

Cuestiones de forma y contenido; personal docente; regimen de regularidad; etc.

¿Que es una ecuación diferencial? Orden de una EDP. Notación abreviada para las derivadas parciales ($\partial u / \partial x = u_x$ etc.).

Ejemplo simple $u_x - u_y = ku$ con k constante. Esta ec. es de primer orden y lineal vale decir: Si $u^{(1)}$ y $u^{(2)}$ son soluciones entonces $u := u^{(1)} + u^{(2)}$ también lo es (!). Linealidad de la operacion de tomar derivada parcial de una función. Transformación de variables $\xi := x + y$, $\eta = x - y$ lo cual conduce a la ec. diferencial ordinaria

$$2v_\eta = kv$$

para la función $v(\xi, \eta) = u\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2}\right)$ (i.e. la función u como función de las nuevas variables). Solución general

$$v(\xi, \eta) = f(\xi)e^{k\eta/2}$$

con f función real arbitraria (pero diferenciable). Entonces,

$$u(x, y) = v(x + y, x - y) = f(x + y)e^{k(x-y)/2}$$

es la solución. Una solución “especifica” (especial, particular,...) se obtiene especificando a f . Por ejemplo: si se pide que $u(x, 0) = h(x)$ para todo x real entonces $f(x) = e^{-kx/2}h(x)$ y la solución –cuando h es diferenciable– es única (en todo \mathbb{R}^2) y está dada por

$$u(x, y) = e^{-ky}h(x + y).$$

¿Cuántas soluciones de la EDP hay en el semiplano superior $\{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y > 0\}$ tal que $u(x, 0) = p(x)$ para todo $x \geq 0$ donde p es una dada función diferenciable? La condición especifica a f solamente en el semieje positivo –via

$$f(x) = e^{-kx/2}p(x), \quad x \geq 0$$

y a la solución solamente en el cono $C := \{(x, y) : x \geq -y, y \geq 0\}$ via

$$u(x, y) = e^{-ky}p(x + y);$$

quedando indeterminada en el resto C' del semiplano superior. f es libre en la semirecta no-positiva. Si cambiamos p esto no incide sobre los valores de cualquier solución en el cono C' . La respuesta a la pregunta es: muchísimas (infinitas); tantas como maneras de extender a p a una función diferenciable sobre \mathbb{R} .

En general esperamos que la solución a una EDP de orden k en n variables independientes quede especificada completamente prescribiendo los valores de la función buscada y de sus derivadas parciales hasta orden $k - 1$ en una (hiper) superficie $(n - 1)$ dimensional pero esa hipersuperficie debe ser lo bastante “grande”.

Las EDP –incluso las lineales– son objetos inestables en el sentido que pequeños cambios pueden tener consecuencias enormes (ejemplos en la guía 1).

EDP como modelos de fenómenos físicos. Condiciones subsidiarias; como “iniciales” o de contorno o borde). Resultados de existencia y unicidad de soluciones y su relevancia.

Derivación de la ecuación del calor (Fourier) a partir de la conservación de la energía y la ley de conductividad térmica de Fourier que postula que el flujo de calor es proporcional al gradiente de temperatura (¡signos!) via el Teorema de la Divergencia (o de Gauß). Analogía con la ec. de difusión (reemplazo de la ley de Fourier por la de Fick: el flujo de material es proporcional al gradiente de concentración). En ambos modelos

$$(1) \quad u_t = k\Delta u, \quad k > 0.$$

Esta es la ecuación (de segundo orden) parabólica (se vera más adelante) paradigmática. Se analizarán distintos métodos de construir soluciones y algunas de sus propiedades cualitativas características entre las cuales está aquella de que propaga temporalmente de manera instantanea. Por lo tanto describe pobremente las fases iniciales de un proceso de difusión real.

2. 12/03: Ecuación de difusión (o calor)

Comentarios sobre el rol de la condición $k > 0$; “simetría” $(t, k) \rightarrow (-t, -k)$; sin conclusiones por ahora.

Observar que $u(x, t) = \text{const.}$ es siempre solución.

Ansatz de separación de variables: sin tener en cuenta las condiciones subsidiarias (de borde, iniciales, asintóticas, etc.) se buscan soluciones de (1) de la forma

$$(2) \quad u(x, t) = X(x)T(t).$$

De (1)

$$XT' = kT(\Delta X);$$

si X no es idénticamente nula hay x_o con $X(x_o) \neq 0$ y entonces

$$T' = \underbrace{\frac{\Delta X(x_o)}{X(x_o)}}_{=: \alpha} kT$$

que es ODE lineal de primer orden con coeficientes constantes de modo que

$$T_\alpha(t) = ce^{\alpha kt}$$

es la solución general siendo c constante real arbitraria que se supone no-nula de ahora en mas. En tal caso aprendemos que el cociente T'/T es constante e igual a α . Pero entonces

$$kT\Delta X = X(k\alpha T)$$

y como T no se anula si $c \neq 0$,

$$\Delta X = \alpha X.$$

Esta EDP (llamada de Helmholtz) será estudiada en gran detalle más adelante. Observamos que podemos proceder “inversamente”: cualquiera sea el real α podemos resolver la ODE $T' = \alpha kT$ y si planteamos que $u = XT_\alpha$ obtenemos la ec. de Helmholtz para X .

Para proseguir hacemos la suposición simplificadora de que $n = 1$, i.e. hay una sola dimensión espacial. Entonces la ec. de Helmholtz que obtenemos es

$$X'' = \alpha X;$$

una ODE lineal de segundo orden con coeficientes constantes que también sabemos resolver explícitamente. La soluciones forman un espacio vectorial real de dimensión 2 y la solución general puede expresarse

$$X_\alpha(x) = \begin{cases} a + bx & , \quad \text{si } \alpha = 0 \\ ae^{\sqrt{\alpha}x} + be^{-\sqrt{\alpha}x} & , \quad \text{si } \alpha \neq 0 \end{cases}$$

siendo a y b constantes complejas arbitrarias pero tales que X_α sea real. Aquí, ha de tomarse la raíz cuadrada compleja (cualquiera de las ramas). Alternativamente, la solución general es combinación lineal real de $\cos(\sqrt{|\alpha|x})$ y $\sin(\sqrt{|\alpha|x})$ para $\alpha < 0$ y, combinación lineal real de $\cosh(\sqrt{\alpha}x)$ y $\sinh(\sqrt{\alpha}x)$ para $\alpha > 0$. Hemos obtenido entonces el siguiente resultado. Cualquiera sea el real α la función

$$u_\alpha(x, t) := e^{\alpha kt} X_\alpha(x)$$

es solución de (1) para todo real t , todo real x y todo real no-nulo k . Estas soluciones tienen la particularidad que para $\alpha \neq 0$ son divergentes para $t \rightarrow \infty$ ($\alpha k > 0$) o bien para $t \rightarrow -\infty$ ($\alpha k < 0$). Esto renueva la pregunta planteada sobre la naturaleza de las soluciones en dependencia del signo de k .

Estas soluciones en variables separadas ¿son útiles? En general no podremos satisfacer las condiciones subsidiarias con estas soluciones. Por ejemplo, si imponemos un condición inicial

$$u(x, 0) = f(x)$$

solo podemos acomodar casos donde $f(x) = X_\alpha(x)$.

Pero ¡(1) es lineal! Por lo tanto si $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_N$ son reales arbitrarios la función

$$u = \sum_{n=1}^N c_{\alpha_j} u_{\alpha_j}$$

también es solución cualesquiera sean los coeficientes reales $\{c_{\alpha_j} : j = 1, 2, \dots, N\}$. Y esto extiende algo más la clase de condiciones, por ejemplo iniciales, que se pueden acomodar. Analizamos un caso específico: consideramos (1) en el intervalo $[0, L]$ ($L > 0$) suplementada por la condición de borde

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t > 0.$$

Con (2) esta condición se incorpora naturalmente como condición de borde a la ec. de Helmholtz

$$(3) \quad X'' = \alpha X, \quad 0 < x < L, \quad X(0) = X(L) = 0.$$

Este es un problema de Sturm-Liouville llamado problema de Dirichlet y podemos resolverlo inmediatamente ya que conocemos la solución general X_α de la ODE. Claramente, cuando $\alpha = 0$, una recta no cumple la condición de borde salvo si es nula. Entonces, $\alpha \neq 0$ y, para proseguir, distinguimos los casos $\alpha > 0$ y $\alpha < 0$. En el primero expresamos a X_α como combinación lineal de $\cosh(\sqrt{\alpha}x)$ y de $\sinh(\sqrt{\alpha}x)$ y obtenemos

$$a = X_\alpha(0) = 0 = X_\alpha(L) = a \cosh(\sqrt{\alpha}L) + b \sinh(\sqrt{\alpha}L);$$

de donde $a = 0$ y luego $b = 0$ pues el único cero de $x \mapsto \sinh(\sqrt{\alpha}x)$ para $\alpha > 0$ es cero. En cambio, para $\alpha < 0$ expresando a X_α como combinación lineal de $\cos(\sqrt{-\alpha}x)$ y $\sin(\sqrt{-\alpha}x)$ obtenemos

$$a = X_\alpha(0) = 0 = X_\alpha(L) = a \cos(\sqrt{-\alpha}L) + b \sin(\sqrt{-\alpha}L)$$

de donde $a = 0$ y luego $b = 0$ o bien $\sin(\sqrt{-\alpha}L) = 0$. Descartando la solución idénticamente nula, obtenemos la condición sobre α :

$$\alpha = -\frac{n^2 \pi^2}{L^2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

El caso $n = 0$ conduce a la solución nula; observando que \sin es una función impar y por lo tanto $\sin(-|n|\pi x/L) = -\sin(|n|\pi x/L)$ podemos restringirnos a los siguientes valores de α :

$$\alpha_n = -\frac{n^2 \pi^2}{L^2}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

que tienen asociados las siguientes soluciones del problema de Dirichlet

$$X_n(x) = X_{\alpha_n}(x) = \sin(n\pi x/L).$$

Esto hay que verlo como caso particular de una teoría completamente general. En efecto, (3) es un problema de autovalores para el operador $f \mapsto f''$. Los autovalores (que son los α_n calculados) son negativos y los correspondientes autovectores (en este caso son funciones y se las llama auto-funciones)

$\{X_n : n = 1, 2, \dots\}$ forman un “conjunto completo” de modo que cualquiera sea la función continua g definida en $[0, L]$ se tiene

$$g = \sum_{n=1}^{\infty} g_n X_n, \quad g_n = \frac{\sqrt{2}}{L} \int_0^L g(x) \sin(n\pi x/L) dx.$$

Los números reales $\{g_n : n = 1, 2, \dots\}$ suelen denominarse coeficientes de Fourier (o de Bessel) de g respecto del conjunto completo $\{X_n : n = 1, 2, \dots\}$. La serie para g converge generalmente sólo en media cuadrática; pero bajo ciertas condiciones de regularidad la convergencia es puntual o incluso uniforme. Esta posibilidad de desarrollar “cualquier” función g es la que nos permite obtener una solución a (1) con la condición de borde explicitada y una condición inicial

$$u(x, 0) = f(x) \stackrel{!}{=} \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin(n\pi x/L).$$

muy general.

3. 17/03: Principio extremal para la ec. de difusión y consecuencias. Transformación de Laplace.

Principio extremal y consecuencias.

Considere la ecuación de difusión/calor ($k > 0$)

$$(4) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = k \Delta u$$

para una función u definida en $V \times [0, \infty)$ donde $V \subset \mathbb{R}^n$ es un compacto de borde ∂V para la cual

$$(5) \quad u(\mathbf{x}, 0) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in V;$$

$$(6) \quad u(\mathbf{x}, t) = g(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \partial V \text{ \& } t \geq 0.$$

Teorema 3.1 (*Principio extremal débil*) Para $T > 0$ sea

$$\Gamma_T := \{(\mathbf{x}, 0) : \mathbf{x} \in V\} \cup \{(\mathbf{x}, t) : \mathbf{x} \in \partial V, 0 \leq t \leq T\}.$$

Si u definida en $V \times [0, T]$ es solución de (4) y es continua entonces:

$$(7) \quad \min\{u(\mathbf{x}, s) : (\mathbf{x}, s) \in \Gamma_T\} \leq u(\mathbf{y}, t) \leq \max\{u(\mathbf{x}, s) : (\mathbf{x}, s) \in \Gamma_T\}$$

para todo $(\mathbf{y}, t) \in V \setminus \Gamma_T$.

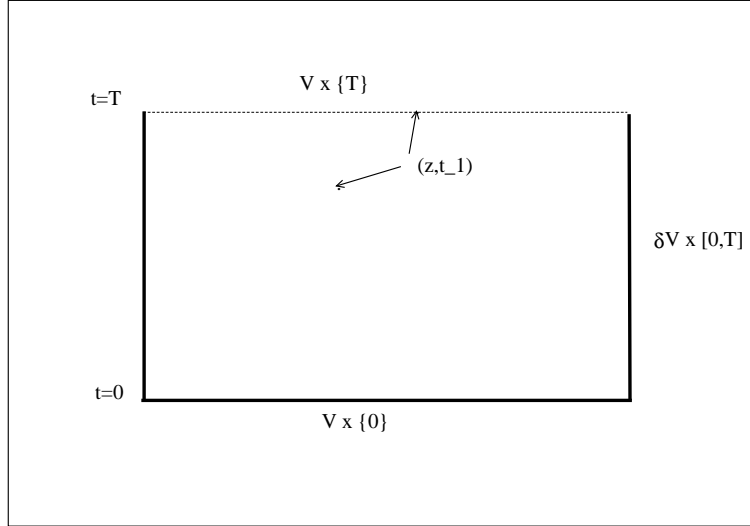
Observe que $V \setminus \Gamma_T = (V \setminus \partial V) \times (0, T]$. En la figura se esquematiza el espacio de fase del sistema: un rectángulo de altura T con sección transversal V (constante). Γ_T consiste (trazo grueso) en la base y ambos lados verticales; $V \setminus \Gamma_T$ es el interior del tubo pero con la “tapa” en $t = T$ que es la sección V sin su borde: $(V \setminus \partial V) \times \{T\}$.

Demostración: Si se ha demostrado el miembro derecho de la desigualdad, entonces –ya que $-u$ es solución continua de (4)– tendremos

$$-u(\mathbf{y}, t) \leq \max\{-u(\mathbf{x}, s) : (\mathbf{x}, s) \in \Gamma_T\} = -\min\{u(\mathbf{x}, s) : (\mathbf{x}, s) \in \Gamma_T\};$$

de modo que basta demostrar el miembro derecho de (7). Esto se hace por contradicción. Suponemos entonces que la afirmación es falsa y hay (\mathbf{y}, t_o) donde $\mathbf{y} \notin \partial V$ y $0 < t_o \leq T$, tal que

$$(8) \quad u(\mathbf{y}, t_o) > \max\{u(\mathbf{x}, t) : (\mathbf{x}, t) \in \Gamma_T\} =: M.$$



Considere la función $v_\epsilon(\mathbf{x}, t) := u(\mathbf{x}, t) - \epsilon(t - t_o)$ donde $\epsilon > 0$. Entonces $v_\epsilon(\mathbf{y}, t_o) = u(\mathbf{y}, t_o)$ y

$$\begin{aligned} \max_{(\mathbf{x}, t) \in \Gamma_T} v_\epsilon(\mathbf{x}, t) &\leq \max_{(\mathbf{x}, t) \in \Gamma_T} u(\mathbf{x}, t) + \max_{(\mathbf{x}, t) \in \Gamma_T} (-\epsilon(t - t_o)) \\ &= M - \min_{0 \leq t \leq T} (\epsilon(t - t_o)) = M + \epsilon t_o ; \end{aligned}$$

de modo que

$$v_\epsilon(\mathbf{y}, t_o) - \max_{(\mathbf{x}, t) \in \Gamma_T} v_\epsilon(\mathbf{x}, t) \geq [u(\mathbf{y}, t_o) - M] - \epsilon t_o.$$

Poniendo $\alpha := u(\mathbf{y}, t_o) - M$, que es estrictamente positivo, deducimos que (recuerde que $t_o > 0$) si $\epsilon < (\alpha/t_o)$, entonces $v_\epsilon(\mathbf{y}, t_o) > \max_{(\mathbf{x}, t) \in \Gamma_T} v_\epsilon(\mathbf{x}, t)$ y por ende v_ϵ asume su máximo en $V \setminus \Gamma_T$. Tomamos un ϵ que satisface la condición y escribimos $w := v_\epsilon$ para este ϵ fijado. Entonces, hay $\mathbf{z} \notin \partial V$ y $0 < t_1 \leq T$ tal que $w(\mathbf{z}, t_1)$ es maximal. Como \mathbf{z} es un punto interior de V , el Hessiano de w respecto de las variables (espaciales) x_1, \dots, x_n evaluado en el pto. maximal debe ser negativo semi-definido¹ :

$$\sum_{j,k=1}^n \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_j \partial x_k} \right) (\mathbf{z}, t_1) p_j p_k \leq 0$$

cualesquiera sea $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$. En particular $\frac{\partial^2 w}{\partial x_j^2}(\mathbf{z}, t_1) \leq 0$ para $j = 1, 2, \dots, n$ y por ende $\Delta w(\mathbf{z}, t_1) \leq 0$.

Entonces, con (4),

$$\frac{\partial w}{\partial t}(\mathbf{z}, t_1) = \frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{z}, t_1) - \epsilon = k \Delta u(\mathbf{z}, t_1) - \epsilon = k \Delta w(\mathbf{z}, t_1) - \epsilon \leq -\epsilon < 0^2 .$$

Por lo tanto la función $t \mapsto w(\mathbf{z}, t)$ es estrictamente decreciente en las inmediaciones de t_1 . En particular, existe $t_2 < t_1$ (ya que $0 < t_1 \leq T$) con $w(\mathbf{z}, t_2) > w(\mathbf{z}, t_1)$ contradiciendo la maximalidad de $w(\mathbf{z}, t_1)$. Por lo tanto la suposición sobre (\mathbf{y}, t_o) es falsa. ■

Mencionamos que hay una versión fuerte del Principio Extremal que dice que en (7) se pueden reemplazar ambas desigualdades por desigualdades estrictas ($\leq \rightarrow <$)³.

Las consecuencias de este gran resultado son muchas:

¹El Hessiano en cualquier punto está definido como la matriz $(n \times n)$ con elementos $H_{j,k}(\mathbf{x}, t) := \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_j \partial x_k} \right) (\mathbf{x}, t)$. El Hessiano es real y simétrico y por lo tanto diagonalizable; que sus autovalores sean no-negativos es equivalente a la condición de ser negativo semi-definido.

²Hemos usado explícitamente que $k > 0$

³Ver Prosser

1. Si los “datos” iniciales f y de borde g son no-negativos entonces $u(\mathbf{x}, t) \geq 0$ para todo \mathbf{x} y todo $t \geq 0$. Esto es consecuencia de $u(\mathbf{x}, t) \geq \min_{\Gamma_T} u = \min\{\min\{f(\mathbf{z}) : \mathbf{z} \in V\}, \min\{g(\mathbf{z}, t) : (\mathbf{z}, t) \in \partial V \times [0, T]\}\}$.

Del mismo modo, $|u|$ es acotado en $V \times [0, T]$ por el mayor de los números $\max_V |f|$ y $\max_{\partial V \times [0, T]} |g|$. Esto lo veremos enseguida.

2. Si la solución continua de la ec. de difusión/calor inhomogénea

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v^2 \Delta u + F$$

con condición inicial (5) y de borde (6) existe para F una función definida en $V \times [0, T]$ entonces es única.

Esto es consecuencia de

Teorema 3.2 Sean u_1 y u_2 soluciones continuas de la ec. inhomogénea

$$v_t = k \Delta v + F$$

donde F es continua en $V \times [0, T]$, tales que

$$u_j(\mathbf{x}, 0) = f_j(\mathbf{x}), \quad j = 1, 2$$

para todo $\mathbf{x} \in V$ y

$$u_j(\mathbf{x}, t) = g_j(\mathbf{x}, t), \quad j = 1, 2$$

para todo $\mathbf{x} \in \partial V$ y todo $t \in [0, T]$, entonces

$$|u_1(\mathbf{x}, t) - u_2(\mathbf{x}, t)| \leq \max\{\max_V |f_1 - f_2|, \max_{\partial V \times [0, T]} |g_1 - g_2|\}$$

para todo $(\mathbf{x}, t) \in V \times [0, T]$.

La unicidad mencionada se obtiene directamente de $f_1 = f_2$ y $g_1 = g_2$.

Este resultado muestra que la ec. de difusión inhomogénea tiene cierta estabilidad o es robusta. Pequeños cambios en las condiciones iniciales y/o de borde tienen pequeñas consecuencias.

Demostración: Sea $u := u_1 - u_2$; entonces $\partial u / \partial t = k \Delta u$ con condición de borde e inicial dadas por $g_1 - g_2$ y $f_1 - f_2$ respectivamente. Por el Principio Extremal débil

$$\min_{\Gamma_T} u \leq u(\mathbf{x}, t) \leq \max_{\Gamma_T} u,$$

para todo $(\mathbf{x}, t) \in V \times [0, T]$. Con el Lema que sigue

$$|u(\mathbf{x}, t)| \leq \max_{\Gamma_T} |u|.$$

Pero

$$\max_{\Gamma_T} |u| = \max\{\max_V |f_1 - f_2|, \max_{\partial V \times [0, T]} |g_1 - g_2|\}$$

■

Lema 1 Si la función real h sobre un compacto X en \mathbb{R}^n es continua y $Y \subset X$ es cerrado y se tiene $\min_Y h \leq h(x) \leq \max_Y h$ para todo $x \in X$ entonces $|h(x)| \leq \max_Y |h|$ para todo $x \in X$.

Demostración: Sean $A := \max_Y h$ y $B := \min_Y h$; entonces

$$|h(x)| \leq \max\{|A|, |B|\}.$$

Probamos que

$$\max\{|A|, |B|\} = \max_Y |h|.$$

Los casos $B \geq 0$ o $A \leq 0$ son inmediatos y los dejamos para el lector. Supongamos entonces que $B < 0$ y $A > 0$. En tal caso h asume valores tanto positivos como negativos en Y de modo que $V := \{x \in Y : h(x) \geq 0\}$ y $W := \{x \in Y : h(x) \leq 0\}$ son ambos no vacíos y compactos ya que son cerrados y $V \cup W = Y$. Ahora $|A| = A = \max_V h = \max_V |h|$ y $|B| = -B = -\min_W h = \max_W (-h) = \max_W |h|$ de modo que

$$\max\{|A|, |B|\} = \max\{\max_V |h|, \max_W |h|\} = \max_Y |h| .$$

■

3. El siguiente resultado explicitado para el caso espacial uni-dimensional muestra otras virtudes del Principio Extremal débil.

Teorema 3.3 *Sea $L > 0$. Si la serie (de senos)*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n\pi x/L)$$

converge uniformemente para $x \in [0, L]$ entonces la serie

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n\pi x/L) e^{-kn^2 \pi^2 t/L^2}$$

converge uniformemente para $(x, t) \in [0, L] \times [0, T]$ cualquiera sea $T > 0$ y u es la solución de la ec. (4) con condición inicial (5) determinada por f y con la condición de borde $u(0, t) = u(L, t) = 0$ para todo $t \in [0, T]$.

Demostración: Damos solamente una hoja de ruta. Cualquiera sea el conjunto finito $K \subset \mathbb{N}$, la función $u_K(x, t) = \sum_{n \in K} c_n \sin(n\pi x/L)$ es solución de (4) con la condición nulidad en el borde $x = 0, L$. El criterio de Cauchy para la convergencia uniforme de una serie nos dice que dado $\epsilon > 0$ hay N de modo que para $k \geq \ell \geq N$,

$$\left| \sum_{n=\ell}^k c_n \sin(n\pi x/L) \right| < \epsilon .$$

Por el Principio Extremal débil se tendrá entonces

$$\left| \sum_{n=\ell}^k c_n \sin(n\pi x/L) e^{-kn^2 \pi^2 t/L^2} \right| < \epsilon$$

cualquiera sea $T > 0$. Etc. ■

Transformación de Laplace

Recordamos que si f está definida en $[0, \infty)$ y toma valores reales, la transformada de Laplace $\mathcal{L}f$ es la función

$$(\mathcal{L}f)(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

definida para aquellos valores de s para los cuales la integral existe (s puede ser complejo⁴). La propiedad sobresaliente de la transformación de Laplace en cuanto a su utilidad para atacar problemas de ecuaciones diferenciales es que

$$(\mathcal{L}f')(s) = s(\mathcal{L}f)(s) - f(0) , \quad \text{si } \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st} f(t) = 0 ,$$

⁴Si f es integrable o sea, $\int_0^{\infty} |f(t)| dt$ existe, entonces la transformada de Laplace está definida para todo s complejo con $Re(s) \geq 0$. Si f es acotada, i.e., $|f(t)| \leq K$ para todo $t \geq 0$; entonces la transformada de Laplace existe para todo s complejo con $Re(s) > 0$ y satisface $|(\mathcal{L}f)(s)| \leq K/Re(s)$ pero puede diverger cuando $Re(s) \rightarrow 0^+$.

lo que surge de una integración por partes de la definición. No nos detenemos en las condiciones necesarias para que $\mathcal{L}f$ y $\mathcal{L}f'$ estén bien definidas, si no mas bien buscamos expresiones que formalmente son soluciones de la ec. de difusión. Será preciso entonces verificar a posteriori si estas expresiones conducen realmente a soluciones clásicas de la EDP.

La mejor tabla de transformadas de Laplace sigue siendo la de Erdélyi (*Tables of Integral Transforms*, Vol. 1. McGraw-Hill, New York 1954). Hay una buena tabla en Abramowitz & Stegun (*Handbook of Mathematical Functions*. Dover, New York 1965; paginas 1019 y siguientes (novena impresión)).

Consideremos a (4) (con $k > 0$) en algún dominio $V \subset \mathbb{R}^n$ y para $t > 0$. Transformamos según Laplace a la función $t \mapsto u(\mathbf{x}, t)$:

$$G(\mathbf{x}, s) := (\mathcal{L}u(\mathbf{x}, \cdot))(s) = \int_0^\infty e^{-st} u(\mathbf{x}, t) dt .$$

Con (4) y permutando las derivadas espaciales con la integración,

$$-u(\mathbf{x}, 0) + sG(\mathbf{x}, s) = k(\Delta G)(\mathbf{x}, s) .$$

Esta es la ecuación de Helmholtz pero ahora inhomogénea debido al término $u(\mathbf{x}, 0)$ especificado por la condición inicial. Debemos resolverla para s fijo para luego $-$ variando $s-$ obtener la función $(\mathbf{x}, s) \mapsto G(\mathbf{x}, s)$. Nuevamente para simplificar, consideramos una sola variable espacial de modo que la ec. de Helmholtz se transforma en una ODE de segundo orden lineal e inhomogénea con coeficientes que son funciones de s :

$$G''(x, s) = (s/k)G(x, s) - u(x, 0)/k .$$

La solución general se obtiene sumándole a la solución general de la ec. homogénea cualquier solución particular.

4. 19/03: Transformación de Laplace (continuación)

Aplicando la conocida fórmula, observe que

$$\eta(x, s) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k}{s}} \int_{x_0}^x u(y, 0) (e^{-\sqrt{s/k}(x-y)} - e^{\sqrt{s/k}(x-y)})$$

es una solución. Luego,

$$A(s)e^{\sqrt{s/k}x} + B(s)e^{-\sqrt{s/k}x} + \eta(x, s)$$

es la solución general de la ec. de Helmholtz para G . Una vez determinadas las funciones A y B , el resto es un problema de invertir la transformación de Laplace. Esto puede hacerse numericamente sin mayores problemas. Las funciones A y B están determinadas por condiciones subsidiarias. Por ejemplo por una condición de borde, o una condición de borde y alguna condición asintótica, etc. Veremos ejemplos concretos. En todo caso, si a y b denotan aquellas funciones de $t > 0$ tales que

$$A = \mathcal{L}a , \quad B = \mathcal{L}b ,$$

podremos expresar a u como suma de la convolución de a (con cierta función cuya transformada de Laplace es $e^{\sqrt{s/k}x}$), de la convolución de b (con cierta función cuya transformada de Laplace es $e^{-\sqrt{s/k}x}$) y una expresión integral que involucra a la condición inicial y a aquella función de $t > 0$ cuya transformada de Laplace es $\sinh(\sqrt{s/k}x)$.

Es fácil encontrar una solución particular si

$$(9) \quad u(x, 0) = \alpha ,$$

pues la función constante e igual a α/s es solución particular. En tal caso la solución general de nuestra ec. de Helmholtz es

$$(10) \quad G(x, s) = \frac{\alpha}{s} + A(s)e^{\sqrt{s/k}x} + B(s)e^{-\sqrt{s/k}x}$$

con funciones A y B básicamente arbitrarias. Usaremos esta expresión para discutir una serie de casos.

1. Consideremos el caso $V = [0, L]$ con $L > 0$ y agregamos las condiciones de borde

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t > 0,$$

que son compatibles con la condición inicial (9) solamente si $\alpha = 0$. En tal caso, la unicidad de la solución nos dice que u es idénticamente nula y luego G también lo es. Esto también se obtiene directamente a partir de (10) imponiendo $G(0, s) = G(L, s) = 0$ ⁵.

Si suponemos $\alpha > 0$ en (9) tendremos una discontinuidad de $t \mapsto u(0, t)$ y de $t \mapsto u(L, t)$ en $t = 0$. Pero podemos proseguir de todos modos; obtenemos las ecuaciones ($\xi(s) = \sqrt{s/k} L$)

$$0 = G(0, s) = \alpha s^{-1} + A(s) + B(s),$$

$$0 = G(L, s) = \alpha s^{-1} + A(s)e^{\xi(s)} + B(s)e^{-\xi(s)}.$$

que se resuelven a:

$$A(s) = -\alpha s^{-1} \frac{e^{-\xi(s)}(1 - e^{-\xi(s)})}{1 - e^{-2\xi(s)}},$$

$$B(s) = -\alpha s^{-1} \frac{(1 - e^{-\xi(s)})}{1 - e^{-2\xi(s)}}.$$

De modo que

$$G(x, s) = \frac{\alpha}{s} \left(1 - \frac{e^{-\xi(s)(1-x/L)} - e^{-\xi(s)(2-x/L)} + e^{-\xi(s)x/L} - e^{-\xi(s)(1+x/L)}}{1 - e^{-2\xi(s)}} \right).$$

La tarea es ahora calcular la transformación de Laplace inversa de G . Sabiendo que la transformada de Laplace de

$$e(t) = \operatorname{erfc}(\lambda/2\sqrt{t}), \quad \lambda \geq 0,$$

es

$$(\mathcal{L}e)(s) = e^{-\lambda\sqrt{s}}/s,$$

se sugiere la expansión⁶

$$(1 - e^{-\xi(s)})^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\xi(s)}.$$

Esto nos permite expresar a G como serie infinita de términos que son todos proporcionales a $e^{-\lambda\sqrt{s}}$ con ciertas $\lambda \geq 0$ que dependen de x, k, L y del índice de sumación. Obtenemos así la siguiente serie para u

$$u(x, t) = \alpha \left\{ 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (\operatorname{erfc}(L(n+1-x/L)/(2\sqrt{kt})) - \operatorname{erfc}(L(n+2-x/L)/(2\sqrt{kt})) \right. \\ \left. + \operatorname{erfc}(L(n+x/L)/(2\sqrt{kt})) - \operatorname{erfc}(L(n+1+x/L)/(2\sqrt{kt})) \right\}.$$

Esta serie ha de ser comparada y contrastada con la serie de Fourier obtenida por separación de variables (vea por ejemplo el Teorema 3.3). Son “complementarias” en el sentido que la convergencia de la serie de Fourier mejora si aumentamos t mientras que esta mejora si disminuimos t ⁷. En cuanto a la discontinuidad en $t = 0$ en los bordes, lo que podemos decir es que: la serie converge puntualmente en todo (x, t) con $0 < x < L$ y $t > 0$ y que la suma u satisface (4) y $u(x, 0) = \alpha$ para $0 < x < L$ así como $u(0, t) = u(L, t)$ para $t > 0$.

2. Veamos el caso $V = [0, \infty)$ conservando la condición inicial (9) y agregando como condición de borde la condición

$$u(0, t) = h(t),$$

⁵Vea las expresiones para A y B que siguen y ponga $\alpha = 0$

⁶que converje uniformemente en s para $s \geq s_0$ donde $s_0 > 0$ es arbitrario.

⁷La función de error complementaria $\operatorname{erfc}(x) := (2/\sqrt{\pi}) \int_0^{\infty} e^{-p^2} dp$, $x \geq 0$, es decreciente con $\operatorname{erfc}(0) = 1$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{erfc}(x) = 0$.

que trae consigo que

$$G(0, s) = H(s)$$

siendo H la transformada de Laplace de h . Nuevamente observe que habrá una discontinuidad en $(0, 0)$ si $h(0) \neq \alpha$.

Si suponemos que h es acotada y buscamos una solución u que sea acotada, vale decir

$$|u(x, t)| \leq K \quad \text{para todo } x \in V \text{ y todo } t \geq 0,$$

tendremos

$$|G(x, s)| \leq K \int_0^\infty e^{-st} dt = K/s,$$

de modo que $x \rightarrow G(x, s)$ es también acotada. Esto no es posible si en (10) se tiene $A(s) \neq 0$ para algún $s > 0$. Por lo tanto planteamos

$$G(x, s) = \frac{\alpha}{s} + B(s)e^{-\sqrt{s/k}x};$$

luego

$$H(s) = G(0, s) = \frac{\alpha}{s} + B(s)$$

de modo que

$$G(x, s) = \frac{\alpha}{s} \left(1 - e^{-\sqrt{s/k}x}\right) + H(s)e^{-\sqrt{s/k}x}.$$

Ya hemos presentado la transformada de Laplace inversa del primer sumando; tenemos

$$\alpha s^{-1} (1 - e^{-\sqrt{s/k}x}) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \alpha (1 - \operatorname{erfc}(x/2\sqrt{kt})) = \alpha \operatorname{erf}(x/2\sqrt{kt}).$$

Para el segundo sumando usamos la propiedad de convolución: si $q(t) = \int_0^t p(t-t')r(t')$ entonces $(\mathcal{L}q)(s) = (\mathcal{L}p)(s)(\mathcal{L}r)(s)$. Esto con

$$e^{-\sqrt{s/k}x} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{x}{2\sqrt{k\pi t^3}} e^{-x^2/(4kt)}$$

nos da

$$u(x, t) = \alpha \operatorname{erf}(x/(2\sqrt{kt})) + \frac{x}{2\sqrt{k\pi}} \int_0^t h(t') \frac{e^{-x^2/(4k(t-t'))}}{(t-t')^{3/2}} dt'.$$

Se puede verificar directamente que esta función es solución del problema y que $u(x, 0) = \alpha$ para $x > 0$. Que $u(0, t) = h(t)$ para $t > 0$ requiere de cierto esfuerzo ya que si permutamos el límite $x \rightarrow 0$ con la integración en el segundo sumando obtenemos simplemente 0.

5. 26/03: Difusión en todo el espacio; Transformación de Fourier; Simetrías (y representación de grupos)

He hecho el esfuerzo al que me refería y esta volcado en la w-página (Notas varias).

Considere la ec. de difusión/calor (4) en todo \mathbb{R}^d con condición inicial $u(\mathbf{x}, 0) = f(\mathbf{x})$. Anotamos ahora con $c = k$ la constante de difusión.

Se sugiere realizar una transformación de Fourier respecto de las variables espaciales $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$. La gran virtud de la transformación de Fourier siendo que transforma derivadas parciales en multiplicaciones con monomios de las componentes de la variable “conjugada” $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d$. Repasamos entonces algunos aspectos básicos de la transformación de Fourier.

Transformación de Fourier La fórmula básica es

$$(11) \quad \widehat{f}(\mathbf{k}) := (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

que asocia a una función f de d variables reales $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, otra función \widehat{f} del mismo número de variables reales. Esta función \widehat{f} es la transformada de Fourier de f . Obsérvese que aunque f tome valores reales, los valores de \widehat{f} son complejos (aunque satisfacen $\widehat{f}(\mathbf{k}) = \widehat{f}(-\mathbf{k})$ en este caso). Para poder darle sentido a esto es necesario que f tenga propiedades que permitan garantizar la existencia de la integral (impropia). Una discusión adecuada y profunda de este aspecto necesita necesariamente de una teoría de integración más general que la teoría de la integral de Riemann (ver, e.g.,). Esta teoría no está disponible para nosotros. Lo que sigue puede verse entonces como manipuleo formal (se permutan “a piacere” integrales con derivadas y otros límites) que necesita de un análisis matemático más cuidadoso. Tanto el factor $(1/\sqrt{2\pi})^d$ como el signo del argumento del factor exponencial es cuestión de convención. Al factor $(1/\sqrt{2\pi})^d$ se lo puede omitir o colocar π en el exponente de la exponencial oscilatoria; si se lo omite reaparece en la transformada inversa. La convención que se elige aquí es quizás la más natural y conveniente en las aplicaciones a la mecánica cuántica y es la que reparte a π de manera simétrica entre la transformada y su inversa. ¡Al consultar tablas de transformadas, asegurarse de cual es la convención usada!

Claramente, la transformación de Fourier allí donde este definida es una transformación lineal del espacio vectorial complejo de las funciones a valores complejos definidas en \mathbb{R}^d . La propiedad crucial de la transformación de Fourier es que transforma derivadas en multiplicación por la variable. Con $d = 1$ calculamos la transformada de Fourier de la derivada f' de f :⁸

$$\begin{aligned}\widehat{f'}(k) &= (f')^\wedge(k) = (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} f'(x) dx \\ &= (2\pi)^{-1/2} [e^{-ikx} f(x)]_{-\infty}^{\infty} - (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} (-ik) e^{-ikx} f(x) dx = (2\pi)^{-1/2} [e^{-ikx} f(x)]_{-\infty}^{\infty} + ik \widehat{f}(k)\end{aligned}$$

y cuando “ f decae en el infinito”: $\widehat{f'}(k) = +ik \widehat{f}(k)$. ¡Está simple pero fantástica relación hace de la transformada de Fourier una arma poderosa para el análisis de ecuaciones diferenciales ordinarias o no! La versión multidimensional es

$$(12) \quad \left(\frac{\partial^m f}{\partial x_{\alpha_1} \partial x_{\alpha_2} \dots \partial x_{\alpha_m}} \right)^\wedge(\mathbf{k}) = (i)^m k_{\alpha_1} k_{\alpha_2} \dots k_{\alpha_m} \widehat{f}(\mathbf{k}), \quad \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in \{1, 2, \dots, d\}.$$

Si f admite una transformada de Fourier \widehat{f} que a su vez admite una transformada de Fourier entonces se tiene (¡esto es altamente no-trivial y volveremos sobre ello!)

$$(13) \quad f(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \widehat{f}(\mathbf{k}) d\mathbf{k} = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \widehat{f}(-\mathbf{k}) d\mathbf{k}.$$

Notese el signo en el argumento de la exponencial; se tiene $\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}\mathcal{P}$ donde \mathcal{P} es la transformación (lineal) dada por la inversión

$$(\mathcal{P}f)(\mathbf{y}) = f(-\mathbf{y}).$$

Otra propiedad crucial es la relativa a la convolución. La convolución de dos funciones f y g es

$$(f \star g)(\mathbf{x}) := \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) g(\mathbf{y}) d\mathbf{y}.$$

La propiedad crucial es

$$(f \star g)^\wedge(\mathbf{k}) = (2\pi)^{d/2} \widehat{g}(\mathbf{k}) \widehat{f}(\mathbf{k});$$

o sea:

$$(14) \quad \widehat{(f \star g)} = (2\pi)^{d/2} \widehat{g} \widehat{f}.$$

Volveremos sobre esto más adelante.

⁸Cuando puede haber confusión escribimos a veces $\widehat{(\cdot)}$ (e.g., $\widehat{f'} \neq (\widehat{f})'$).

Regresando a la transformación de Fourier de la (4), con \hat{u} la transformada de Fourier de u respecto de las variables espaciales dada por

$$\hat{u}(\mathbf{k}, t) := (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} u(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}$$

nos produce

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = -c|\mathbf{k}|^2 \hat{u};$$

con condición inicial (transformación de Fourier de (5)):

$$\hat{u}(\mathbf{k}, 0) = \hat{f}(\mathbf{k}).$$

Cuya integración produce inmediatamente

$$\hat{u}(\mathbf{k}, t) = \hat{f}(\mathbf{k}) e^{-c|\mathbf{k}|^2 t}.$$

Esto es el producto de \hat{f} con la Gaussiana. Por la fórmula (14)

$$u(\mathbf{x}, t) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{\Phi}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) f(\mathbf{y}) d^n \mathbf{y},$$

siendo $\tilde{\Phi}$ la anti-transformada de Fourier de la Gaussiana:

$$\tilde{\Phi}(\mathbf{x}, t) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \exp\{-c|\mathbf{k}|^2 t\} d\mathbf{k}.$$

Como la integral factoriza en d integrales sobre \mathbb{R} con integrando $\exp\{ikx_j - ck^2 t\}$ basta calcular esta integral

Lema 2 Si $z \in \mathbb{C}$, entonces

$$\int_{\mathbb{R}} \exp\{-x^2 + 2zx\} dx = \sqrt{\pi} e^{z^2}.$$

Demostración: Lo reducimos a la conocida integral $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ que se obtiene considerando el cuadrado e integrando en coordenadas polares.

Sea $a := \Re(z)$ y $b = \Im(z)$. Considere la función compleja $f(w) := e^{-(w-a)^2}$, $w \in \mathbb{C}$, que es entera y el camino $\gamma \subset \mathbb{C}$ formado por el perímetro del rectángulo en \mathbb{C} de vértices $w_1 = -R$, $w_2 = P$, $w_3 = P - ib$ y $w_4 = -R - ib$ donde $P, R > 0$. Tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \oint_{\gamma} f(w) dw = \int_{-R}^P e^{-(x-a)^2} dx + \int_0^b e^{-(P-a-it)^2} dt + \int_P^{-R} e^{-(-x-a-ib)^2} dx + \int_b^0 e^{-(-R-a-it)^2} dt \\ &= \int_{-R-a}^{P-a} e^{-x^2} dx + e^{-z^2} \int_R^{-P} e^{-x^2+2xz} dx + e^{-(P-a)^2} \int_0^b e^{t^2+2it(P-a)} dt + e^{-(R+a)^2} \int_b^0 e^{t^2-2it(R+a)} dt. \end{aligned}$$

Las dos últimas integrales están acotadas en módulo por $|b|e^{|b|^2}$ con lo cual los dos últimos sumandos tienden a cero para $P, R \rightarrow \infty$ y, por lo tanto

$$\lim_{P, R \rightarrow \infty} e^{z^2} \int_{-P}^R e^{-x^2+2xz} dx = \lim_{P, R \rightarrow \infty} -e^{z^2} \int_R^{-P} e^{-x^2+2xz} dx = \lim_{P, R \rightarrow \infty} \int_{-R-a}^{P-a} e^{-x^2} dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

■

Incorporando el factor $(2\pi)^{-d/2}$ a la función $\tilde{\Phi}$, obtenemos

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = (2\pi)^{-d/2} \tilde{\Phi}(\mathbf{x}, t) = (4\pi ct)^{-n/2} \exp\{-|\mathbf{x}|^2/(4ct)\}$$

y luego

$$(15) \quad u(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = (4\pi ct)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} \exp\{-|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2/(4ct)\} f(\mathbf{y}) d\mathbf{y}.$$

Si bien la derivación de esta fórmula para la solución depende del uso de la transformación de Fourier, podemos analizar su viabilidad como solución cuando f no admite una transformada de Fourier porque no decae suficientemente rápidamente cuando $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$. El decaimiento exponencial (cuadrático) de Φ es la propiedad crucial para extender esta fórmula a situaciones más generales (o simplemente distintas). Como sucede frecuentemente: la fórmula (15) es mucho más general que lo que permite esperar el método usado para obtenerla. Siguen algunos resultados en esa dirección⁹.

Teorema 5.1 *Si el dato inicial f es continuo a trozos con finitos saltos discontinuos en cada intervalo finito, y si existe (15), entonces es solución de la ec. de difusión en $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ y es C^∞ . Se tiene*

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) = \frac{f_+(x) + f_-(x)}{2}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$; donde $f_\pm(x) = \lim_{y \rightarrow x^\pm} f(y)$.

Teorema 5.2 *La solución de (4) que cumple (5) y que es acotada, i.e., $|u(\mathbf{x}, t)| < K$ para todo $(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^d \times [0, \infty)$, es única.*

En especial,

Teorema 5.3 *Si el dato inicial f es acotado, entonces (15) es la única solución acotada del problema de valores iniciales (4, 5).*

Simetrías

Queremos desarrollar un formalismo que nos permita discutir simetrías de EDP y/o de sus soluciones. Lo que sigue no es enteramente fiel a lo dicho en clase.

Supongamos que tenemos una solución u de (4) en $\mathbb{R} \times (0, \infty)$, y consideremos la transformación de variables asociada con cualquier real positivo λ :

$$(16) \quad \mathbb{R} \times (0, \infty) \ni (x, t) \mapsto (\xi, \tau) := (\lambda x, \lambda^2 t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty).$$

La función $w : \mathbb{R} \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$w(\xi, \tau) := u(\xi/\lambda, \tau/\lambda^2)$$

satisface:

$$\begin{aligned} w_\tau(\xi, \tau) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{w(\xi, \tau + h) - w(\xi, \tau)}{h} = \lambda^{-2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(\lambda^{-1}\xi, \lambda^{-2}(\tau + h)) - u(\lambda^{-1}\xi, \lambda^{-2}\tau)}{\lambda^{-2}h} \\ &= \lambda^{-2} u_t(\lambda^{-1}\xi, \lambda^{-2}\tau) = \lambda^{-2} c u_{xx}(\lambda^{-1}\xi, \lambda^{-2}\tau); \end{aligned}$$

y también:

$$\begin{aligned} w_{\xi\xi}(\xi, \tau) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{w_\xi(\xi + h, \tau) - w_\xi(\xi, \tau)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\lim_{p \rightarrow 0} \frac{w(\xi + h + p, \tau) - w(\xi + h, \tau)}{hp} - \lim_{q \rightarrow 0} \frac{w(\xi + q, \tau) - w(\xi, \tau)}{hq} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\lim_{p \rightarrow 0} \frac{u(\lambda^{-1}(\xi + h + p), \lambda^{-2}\tau) - u(\lambda^{-1}(\xi + h), \lambda^{-2}\tau)}{hp} \right. \\ &\quad \left. - \lim_{q \rightarrow 0} \frac{u(\lambda^{-1}(\xi + q), \lambda^{-2}\tau) - u(\lambda^{-1}\xi, \lambda^{-2}\tau)}{hq} \right) \\ &= \lambda^{-2} \lim_{h \rightarrow 0} \left(\lim_{p \rightarrow 0} \frac{u(\lambda^{-1}(\xi + h + p), \lambda^{-2}\tau) - u(\lambda^{-1}(\xi + h), \lambda^{-2}\tau)}{(\lambda^{-1}h)(\lambda^{-1}p)} \right. \\ &\quad \left. - \lim_{q \rightarrow 0} \frac{u(\lambda^{-1}(\xi + q), \lambda^{-2}\tau) - u(\lambda^{-1}\xi, \lambda^{-2}\tau)}{(\lambda^{-1}h)(\lambda^{-1}q)} \right) \end{aligned}$$

⁹Las demostraciones de estos y muchos otros resultados interesantes se pueden consultar en F. John y/o en S. Zaidman (ver Bibliografía en el programa).

$$= \lambda^{-2} \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{u_x(\lambda^{-1}(\xi + h), \lambda^{-2}\tau)}{(\lambda^{-1}h)} - \frac{u_x(\lambda^{-1}\xi, \lambda^{-2}\tau)}{(\lambda^{-1}h)} \right) = \lambda^{-2} u_{xx}(\lambda^{-1}\xi, \lambda^{-2}\tau);$$

de modo que:

$$w_\tau = cw_{\xi\xi}.$$

Lo que cualquiera hubiera escrito usando la regla de la cadena (que no es otra cosa que una manera simbólica de hacer lo que acabamos de hacer en base a la definición de la derivada). Formalizando un poco más, sea

$$(S_\lambda f)(\mathbf{x}, t) := f(\lambda^{-1}\mathbf{x}, \lambda^{-2}t)$$

que es un operador lineal definido en (el espacio vectorial complejo de) las funciones (a valores complejos) sobre $\mathbb{R}^d \times (0, \infty)$. Es inmediato verificar (¡hagalo!) que

$$(17) \quad S_\lambda S_\mu = S_{\lambda\mu}.$$

Observe en particular que S_λ es invertible con inversa

$$(S_\lambda)^{-1} = S_{1/\lambda}.$$

Lo que acabamos de hacer arriba es ver que

$$\frac{\partial}{\partial \tau} S_\lambda = \lambda^{-2} S_\lambda \frac{\partial}{\partial t};$$

y que

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} S_\lambda = \lambda^{-2} S_\lambda \frac{\partial^2}{\partial x^2};$$

lo que –con el dato extra de que u es una solución de la EDP– nos dio que también $w := S_\lambda u$ lo es. Un cálculo idéntico al ya hecho nos muestra que en d dimensiones espaciales

$$\Delta_\xi S_\lambda = \lambda^{-2} S_\lambda \Delta_x$$

donde el índice denota las variables naturales. Podemos reescribir estas relaciones (multiplicando las anteriores por $(S_\lambda)^{-1}$)

$$(18) \quad S_{1/\lambda} \frac{\partial}{\partial \tau} S_\lambda = \lambda^{-2} \frac{\partial}{\partial t}, \quad S_{1/\lambda} \Delta_\xi S_\lambda = \lambda^{-2} \Delta_x;$$

estas implican lo que uno llama la invarianza de la (4) respecto de la transformación de escala dada por (16). ¿Es indispensable introducir el operador (lineal) S_λ para ver la invarianza de la ec. de difusión respecto de esa transformación de escala? Quizás no, ya que el resultado sale inmediatamente del uso (correcto) de la regla de la cadena. Sin embargo, las relaciones (18) pueden ser útiles (lo son) en otros contextos.

Volvamos a la relación (17); ella nos dice que si consideramos a los números reales positivos con la multiplicación usual entonces el mapa

$$(19) \quad (0, \infty) \ni \lambda \mapsto S_\lambda$$

que le asocia a cada uno de estos números (λ) una transformación lineal invertible (S_λ), lo hace respetando la multiplicación si consideramos como multiplicación de transformaciones lineales a la aplicación sucesiva. O sea:

$$\underbrace{S_\lambda S_\mu}_{\text{aplicar primero } S_\mu \text{ y luego } S_\lambda} = \underbrace{S_{\lambda \cdot \mu}}_{\text{aplicar el } S \text{ asociado con el producto de } \lambda \text{ con } \mu}.$$

Observe que acá $S_\lambda S_\mu = S_\mu S_\lambda$. Ahora $(0, \infty)$ con la multiplicación es lo que se llama un *grupo*. Un conjunto G con una operación binaria “ \circ ”¹⁰ que es asociativa¹¹ de modo que hay un elemento distinguido (llamado neutro) e que satisface $g \circ e = e \circ g$ para todo $g \in G$ y de modo que todo $g \in G$ tiene un “inverso” h

¹⁰mapa que a cada par ordenado (g_1, g_2) de elementos de G le asocia un elemento $g_1 \circ g_2$ de G .

¹¹ $(g_1 \circ g_2) \circ g_3 = g_1 \circ (g_2 \circ g_3)$.

para el cual vale $g \circ h = h \circ g = e$ (luego se demuestra que el inverso es único y se anota g^{-1}). En nuestro caso, $G = (0, \infty)$ con la multiplicación como operación binaria y entonces 1 es el elemento neutro y $(\lambda)^{-1} = 1/\lambda$ es el inverso.

También las transformaciones (lineales o no) invertibles de un espacio vectorial (complejo o real) forman de manera natural un grupo. En efecto, si T y S son transformaciones (lineales o no) del espacio vectorial \mathcal{V} y definimos el mapa $T \circ S$ por

$$(T \circ S)v := T(S(v)), \quad v \in \mathcal{V}$$

(al vector v se le aplica S para obtener el vector Sv y a este vector se le aplica la transformación T), entonces $T \circ S$ es una transformación de \mathcal{V} en \mathcal{V} que es lineal si tanto S como T lo son. Además, si tanto T como S son invertibles con inversas T^{-1} y S^{-1} respectivamente¹² entonces $S^{-1} \circ T^{-1}$ es la transformación inversa a $T \circ S$ como se verifica inmediatamente. Por lo tanto el conjunto de las transformaciones (lineales o no) de \mathcal{V} en si mismo con la operación binaria \circ (que es asociativa como se ve rápidamente) forman un grupo con elemento neutro $I =$ aplicación idéntica (o sea $Iv = v$) que es lineal, e inverso dado por la transformación inversa. Luego podemos releer a la relación (17); ella nos dice que el mapa (19) $\lambda \mapsto S_\lambda$ aplica el grupo (\mathbb{R}^+, \cdot) de los reales positivos con multiplicación en el grupo de transformaciones lineales invertibles con la composición de transformaciones como operación. Hemos obtenido una copia fiel del grupo (\mathbb{R}^+, \cdot) en las transformaciones lineales. Esto es lo que se llama un homomorfismo de grupos y, en este caso más precisamente, una representación del grupo (\mathbb{R}^+, \cdot) sobre \mathcal{V} .

Lo que acabamos de hacer es un ejemplo concreto de la siguiente situación. Tenemos un espacio \mathbb{X} con el cual describimos nuestro sistema físico (e.g.: $\mathbb{R}^d \times [0, \infty)$ en la difusión en todo el espacio) y un grupo G de transformaciones $g : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ actuando en \mathbb{X} que son biyectivas (anotamos la inversa con g^{-1}) y tomamos la aplicación sucesiva como operación binaria \circ de G . Consideramos las funciones f a valores reales o complejos sobre \mathbb{X} y definimos

$$(T_g f)(x) := f(g^{-1}x), \quad g \in G, \quad x \in \mathbb{X}.$$

Entonces

$$(T_g T_h f)(x) = (T_h f)(g^{-1}(x)) = f(h^{-1}(g^{-1}(x))) = f((h^{-1} \circ g^{-1})(x)) = f((g \circ h)^{-1}(x)) = (T_{g \circ h} f)(x),$$

vale decir¹³

$$T_g T_h = T_{g \circ h},$$

de modo que $G \ni g \mapsto T_g$ define un homomorfismo del grupo (G, \circ) en el grupo de las transformaciones lineales invertibles del espacio vectorial formado por las funciones f (donde la operación de grupo también es la aplicación sucesiva).

6. 7/04: Ec.de dif. (fin); Simetrías II

1. Ejercicio: La variable $x/2\sqrt{kt}$ es invariante ante la transformación de escala $\mathbb{R} \times [0, \infty) \ni (x, t) \mapsto (\lambda x, \lambda^2 t)$ para $\lambda > 0$. Vimos que la ec. de difusión (4) es invariante ante la transformación de escala $(S_\lambda u)(\mathbf{x}, t) := u(\lambda^{-1} \mathbf{x}, \lambda^{-2} t)$ de funciones definidas en $\mathbb{R} \times [0, \infty)$.

Muestre que la única solución u de (4) en $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ de la forma $u(x, t) = \varphi(x/2\sqrt{kt})$ es

$$\varphi(y) = \alpha + \beta \operatorname{erf}(y)$$

con α y β constantes arbitrarias donde

$$\operatorname{erf}(y) = (2/\sqrt{\pi}) \int_0^y e^{-p^2} dp, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Verifique que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) = \begin{cases} \alpha + \beta & , \quad \text{si } x > 0 \\ \alpha - \beta & , \quad \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

¹²Que son lineales si tanto T como S lo son.

¹³Notese aquí que el inverso usado en la definición de T_g es esencial para obtener el orden correcto; si se usara g en esa definición se obtendría $T_g T_h = T_{h \circ g}$.

Use traslaciones para obtener una solución del problema de valores iniciales de (4) con

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1 & , \quad \text{si } x > a \\ 0 & , \quad \text{si } x < a \end{cases}$$

donde a es un real arbitrario.

2. Se sabe (ver e.g. libro de F. John, p. 211 y siguientes) que la fórmula (15) es una de infinitas (!) soluciones del problema de valores iniciales (4,5) en $\mathbb{R}^d \times (0, \infty)$. La unicidad –como ya vimos en algunos casos– se obtiene imponiendo condiciones subsidiarias a la solución.

Un resultado interesante es

Teorema 6.1 (*D.V. Widder*) Sea $(x, t) \mapsto u(x, t)$ continua en $\mathbb{R} \times [0, T]$, con u_t y u_{xx} continua en $\mathbb{R} \times (0, T)$. Si u es solución del problema de valores iniciales (4,5) y se tiene $u(x, t) \geq 0$ en $\mathbb{R} \times (0, T)$, entonces u es única en $\mathbb{R} \times (0, T)$ y está dada allí por (15).

Observe que la condición de positividad de la solución puede reemplazarse (sumando una constante y multiplicando por -1) por la condición de que u sea acotada por debajo o por arriba.

3. Considere un espacio vectorial (real o complejo) \mathbb{V} munido de una distancia $d(\cdot, \cdot)$ y un operador lineal $A : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ que es continuo; o sea: si $\{v_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{V}$ es una sucesión que converge a $v \in \mathbb{V}$ (i.e. $\lim_{n \rightarrow \infty} d(v, v_n) = 0$) entonces $\{Av_n : n \in \mathbb{N}\}$ converge a Av (i.e. $\lim_{n \rightarrow \infty} d(Av, Av_n) = 0$). La ecuación diferencial ordinaria

$$y'(t) = Ay(t), \quad t_o < t < T, \quad y(t_o) = y_o$$

en \mathbb{V} tiene sentido si se interpreta a la derivada $y'(t)$ como: para cada $t \in (t_o, T)$ existe un vector $v(t) \in \mathbb{V}$ de modo que

$$\lim_{h \rightarrow 0} d\left(v(t), \frac{y(t+h) - y(t)}{h}\right) = 0.$$

La solución es

$$y(t) = \exp\{A(t - t_o)\}y_o$$

donde la exponencial del operador As está definida como límite de la serie infinita

$$e^{As}v = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{s^n}{n!} A^n v, \quad v \in \mathbb{V}$$

en el sentido que dado $v \in \mathbb{V}$ hay $w \in \mathbb{V}$ con

$$\lim_{N \rightarrow \infty} d\left(w, \sum_{n=0}^N \frac{s^n}{n!} A^n v\right) = 0.$$

w es único y se lo anota $e^{sA}v := w$.

La ec. de difusión (4) es de primer orden en el tiempo y es un caso particular de lo recién descrito. En efecto

$$u_t = k\Delta u, \quad t > 0,$$

y $k\Delta$ es un operador lineal actuando sobre el espacio vectorial (real) de las funciones a valores reales definidas en algún $V \subset \mathbb{R}^d$ que sean lo suficientemente “suaves” (i.e. diferenciables) provistas de la distancia (por ejemplo)

$$d(f, g) = \int_V |f(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x})| d\mathbf{x}.$$

No está claro que el Laplaciano sea continuo. ¡De hecho generalmente no lo es! Pero formalmente la solución es

$$u(\cdot, t) = \exp\{k\Delta t\}u(\cdot, 0).$$

Esto nos provee de una herramienta –nueva, distinta– para analizar la solución de la ec. de difusión. Hay que analizar la exponencial del Laplaciano. Este método aplicado al caso unidimensional $0 \leq$

$x \leq L$ con condición de borde de Dirichlet (o Neumann) nos conduciría irrevocablemente a la solución por series de Fourier. ¿Como? El Laplaciano en $[0, L]$ con esas condiciones de borde es un problema de Sturm-Liouville (o bien: el Laplaciano con esas condiciones de borde resulta ser un operador auto-adjunto respecto del producto escalar canónico); los autovalores existen $\{\lambda_n : n \geq 1\}$, son simples y son tantos que las correspondientes autofunciones $\{\varphi_n : n \geq 1\}$ forman un conjunto ortonormal completo (una base ortonormal); entonces denotando con P_n a las proyecciones ortogonales a las autofunciones φ_n ,

$$\Delta = \sum_{n \geq 1} \lambda_n P_n, \quad e^{s\Delta} = \sum_{n \geq 1} e^{\lambda_n s} P_n;$$

de modo que la solución de la ec. de difusión con condición de borde de Dirichlet (o Neumann) y condición inicial (5) es

$$u(x, t) = (\exp\{kt\Delta\}f)(x) = \sum_{n \geq 1} e^{kt\lambda_n} f_n \varphi_n(x), \quad f_n = \int_0^L \frac{\varphi_n(x)}{\varphi_n(x)} f(x) dx.$$

Simetrías II

\mathbb{R}^d es un espacio vectorial real.

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle := \sum_{j=1}^d x_j y_j$$

define un producto escalar y

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$$

es una norma y $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ es una distancia. \mathbb{R}^d es completo respecto de esta norma: toda sucesión de Cauchy en \mathbb{R}^d es convergente. Si $T : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ es una transformación lineal continua a ella le corresponde unívocamente una matriz $[T]$ que es $d \times d$ con elementos reales $T_{j,k}$ ($j, k = 1, 2, \dots, d$) de modo que

$$(T\mathbf{x})_j = \sum_{k=1}^d T_{j,k} x_k, \quad j = 1, 2, \dots, d.$$

Dada cualquier matriz $[T]$ que sea $d \times d$ y tenga elementos reales esta fórmula define una transformación lineal única. Se verifica sin problemas que si A y B son transformaciones lineales entonces AB definida por $(AB)\mathbf{x} := A(B\mathbf{x})$ es lineal y que $[AB] = [A] \cdot [B]$ donde el producto de matrices es el canónico

$$(AB)_{j,k} = \sum_{\ell=1}^d A_{j,\ell} B_{\ell,k}.$$

La matriz adjunta (o transpuesta en este caso real) a la matriz $[T]$ es aquella matriz $[S]$ cuyos elementos son $S_{j,k} = T_{k,j}$. Se ve inmediatamente que la correspondiente transformación lineal S tiene la propiedad

$$\langle S\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, T\mathbf{y} \rangle$$

para todo \mathbf{x} y todo \mathbf{y} en \mathbb{R}^d ; además es la única transformación lineal con esta propiedad. Se llama a S la *adjunta* de T y se anota $T^* = S$. Es inmediato verificar que $(zA + B)^* = zA^* + B^*$ si A, B son transformaciones lineales y z es un escalar real; y que $(AB)^* = B^*A^*$.

Una transformación lineal T se dice *ortogonal* si T es invertible (o sea: existe una transformación lineal Q con $TQ = QT = id$) y la inversa es igual la adjunta. Esto significa que $(T)^{-1} = T^*$ o sea:

$$T^*T = TT^* = id.$$

En dimensión finita resulta que

$$T^*T = id \iff TT^* = id.$$

Entonces la ortogonalidad de T es equivalente a

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, T^*T\mathbf{y} \rangle = \langle T\mathbf{x}, T\mathbf{y} \rangle, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$$

lo que Euclides expresaría como: una transformación ortogonal es una transformación lineal que preserva ángulos y largos. Observe que si T es ortogonal entonces $T^{-1} = T^*$ también lo es. Además si T_1 y T_2 son ortogonales entonces

$$(T_1 T_2)^{-1} = (T_2)^{-1} (T_1)^{-1} = T_2^* T_1^* = (T_1 T_2)^*$$

luego $T_1 T_2$ es ortogonal. Como la identidad id , $(id)\mathbf{x} = \mathbf{x}$ es auto-adjunta, es ortogonal. Pero entonces $O(d) := \{T : T \text{ es ortogonal}\}$ con la composición de transformaciones como operación binaria forma un grupo con elemento neutro id e inversa $T^{-1} = T^*$. Este es el grupo ortogonal en d dimensiones. Ya que $\det(T^*) = \det(T)$ las transformaciones ortogonales (viz. $1 = \det(T^* T) = \det(T^*) \det(T) = \det(T)^2$) tienen determinante ± 1 . $SO(d)$ es el conjunto de transformaciones ortogonales de determinante 1¹⁴; como $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ estas forman un subgrupo de $O(3)$.

Si pasamos a considerar funciones a valores reales o complejos definidas en \mathbb{R}^d podemos asociarle a cada $T \in O(d)$ una transformación U_T de funciones via la fórmula

$$(U_T f)(\mathbf{x}) := f(T^{-1} \mathbf{x}) ;$$

esto es lo que se conoce como una transformación de variables. Pero es una transformación muy especial ya que T es lineal y además ortogonal.

Ejercicio:

1. La transformación U_T del espacio vectorial real (o complejo) de funciones definidas en \mathbb{R}^d con valores reales (o complejos) es lineal.
2. $U_T U_S = U_{TS}$; en particular U_T es invertible y $(U_T)^{-1} = U_{T^{-1}}$. El mapa $O(d) \ni T \mapsto U_T$ preserva la estructura del grupo $O(d)$ si se toma a la composición de transformaciones (lineales) de funciones como operación binaria.
3. ¡Al diablo con la linealidad! Si $\tau : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ y $\sigma : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ son biyecciones entonces $\tau \circ \sigma$ definida por $(\tau \circ \sigma)\mathbf{x} = \tau(\sigma(\mathbf{x}))$ es biyección así como la inversa τ^{-1} de τ . id es biyección; las biyecciones de \mathbb{R}^d forman un grupo $\mathcal{B}(d)$ respecto de la composición con elemento neutro id e inversa τ^{-1} . Sea

$$(U_\tau f)(\mathbf{x}) = f(\tau^{-1} \mathbf{x}), \quad \tau \in \mathcal{B}(d).$$

Todo lo dicho anteriormente sobre U_T y sobre la relación de $O(d)$ con $\{U_T : T \in O(d)\}$ vale para $U_\tau, \mathcal{B}(d)$ y $\{U_\tau : \tau \in \mathcal{B}(d)\}$.

Obtenemos una copia fiel de (el grupo de) las transformaciones de coordenadas de \mathbb{R}^d como transformaciones lineales del espacio vectorial de las funciones definidas sobre \mathbb{R}^d .

7. 9/04: Simetrías III. Ecuación de ondas

Se continuo con la consideración de la transformación lineal

$$(U_T f)(x) := f(T^{-1} x)$$

definida sobre funciones a valores reales (o complejos) de una variable $x \in \mathbb{X}$. Los resultados y observaciones pertinentes se encuentran más arriba en este resumen que no es enteramente fiel a la sucesión temporal de las clases.

Se derivó la ecuación para los desplazamientos verticales de una cuerda con tensión horizontal constante: ec. de ondas.

Se obtuvo la solución general

$$u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct)$$

¹⁴Estas son las que además de preservar ángulos y largos también preservan "orientaciones relativas". Por ejemplo: en $d = 3$ se tiene $T(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \det(T)((T\mathbf{a}) \wedge (T\mathbf{b}))$ si $T \in O(3)$.

para la ec. de ondas espacialmente unidimensional $u_{tt} = c^2 u_{xx}$. Esto surge de la transformación de coordenadas $\xi := x + ct$ y $\eta := x - ct$ donde la ec. de onda toma la forma (hiperbólica) $w_{\xi\eta} = 0$. Interpretación de esta solución. Reversibilidad $t \rightarrow -t$ de esta solución. Posibilidad de considerar soluciones “generalizadas” de la ec. de ondas al tomar f y/o g con discontinuidades (o discontinuidades en primera o segunda derivada).

Las características $x \pm ct = \text{const.}$ de la ec. de ondas unidimensional. Por cada punto pasa un sólo par de características. Las “máculas” de f y/o g se propagan a lo largo de las características.

Problema de Cauchy (o de valores iniciales) para la ec. de ondas (en $\mathbb{R} \times (0, \infty)$) y fórmula de d'Alembert para la solución.

8. 14/04: Separación de variables, Transf. de Laplace y de Fourier para la ec. de ondas. Problema de Cauchy (unicidad)

Método de separación de variables para la ecuación de ondas. Con detalles de la solución del problema

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx} + f, \quad 0 < x < L, \quad t > 0; \\ u(0, t) &= u(L, t) = 0, \quad t > 0; \\ u(x, 0) &= g(x), \quad u_t(x, 0) = h(x). \end{aligned}$$

Cuya solución resulta ser

$$u(x, t) = \sum_{n \geq 1} T_n(t) \sin(\lambda_n x)$$

donde $\lambda_n = n\pi/L$ y

$$T_n(t) = \frac{1}{c\lambda_n} \int_0^t \sin(c\lambda_n(t-s)) f_n(s) ds + g_n \cos(c\lambda_n t) + \frac{h_n}{c\lambda_n} \sin(c\lambda_n t),$$

con coeficientes determinados por

$$f_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L f(x, t) \sin(\lambda_n x) dx, \quad g_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin(\lambda_n x) dx, \quad h_n = \frac{2}{L} \int_0^L h(x) \sin(\lambda_n x) dx.$$

Método de transformación de Laplace. Consideramos el problema

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad x \in V \subset \mathbb{R}, \quad t > 0$$

con condiciones iniciales

$$u(x, 0) = h(x), \quad u_t(x, 0) = p(x), \quad x \in V,$$

desestimando eventuales condiciones de contorno. Vemos que la condición inicial nos provee la información necesaria para determinar la segunda derivada espacial de la transformada de Laplace temporal¹⁵ de u o sea:

$$U(x, s) = \int_0^\infty e^{-st} u(x, t) dt.$$

Tenemos

$$s^2 U(x, s) - s u(x, 0) - u_t(x, 0) = c^2 U_{xx}(x, s), \quad x \in V, \quad s > 0.$$

Una ODE lineal de segundo orden pero inhomogénea. La solución se expresa como convolución de la inhomogeneidad con las soluciones de la ecuación homogénea asociada. Estas últimas son $\phi_\pm(x, s) = e^{\pm sx/c}$.

Si $V = \mathbb{R}$ y buscamos una solución acotada del problema dado debemos descartar ϕ_+ para $x \rightarrow \infty$ y a ϕ_- para $x \rightarrow -\infty$. Obtenemos así a

$$U(x, s) = \frac{1}{2c} \int_{\mathbb{R}} e^{-s|x-\xi|/c} (s^{-1} p(\xi) + h(\xi)) d\xi$$

¹⁵Y no a la transformada de Laplace espacial de u

para la transformada de Laplace de la solución acotada u . La inversión de la transformación de Laplace (¡hagalo con tablas!) devuelve la fórmula de d'Alembert.

Transformación de Fourier Si se considera la ec.de ondas en d dimensiones espaciales y \hat{u} denota la transformada de Fourier de una solución u

$$\hat{u}(\mathbf{k}, t) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} u(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}$$

entonces

$$\hat{u}_{tt} = -c^2 \mathbf{k}^2 \hat{u}$$

de donde

$$\hat{u}(\mathbf{k}, t) = F(\mathbf{k})e^{i|\mathbf{k}|ct} + G(\mathbf{k})e^{-i|\mathbf{k}|ct}$$

y por ende

$$u(\mathbf{k}, t) \propto \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}+|\mathbf{k}|ct)} F(\mathbf{k}) d\mathbf{k} + \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-|\mathbf{k}|ct)} G(\mathbf{k}) d\mathbf{k}.$$

En el caso de una sola dimensión espacial se recupera la fórmula $u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct)$.

También se puede realizar una transformación de Fourier temporal

$$\tilde{u}(x, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega t} u(x, t) dt$$

que conduce a

$$-\omega^2 \tilde{u} = c^2 \Delta \tilde{u}$$

Esta ec. de Helmholtz se tratará más adelante.

Unicidad para el problema de Cauchy Considere la ecuación de ondas forzada en una región $V \subset \mathbb{R}^d$ de borde ∂V

$$(20) \quad u_{tt} = c^2 \Delta u + f, \quad (\mathbf{x}, t) \in V \times (-T, T)$$

con condición de contorno

$$(21) \quad u(\mathbf{x}, t) = g(\mathbf{x}, t), \quad (\mathbf{x}, t) \in \partial V \times [-T, T],$$

y condición inicial

$$(22) \quad u(\mathbf{x}, 0) = \varphi(\mathbf{x}), \quad u_t(\mathbf{x}, 0) = \psi(\mathbf{x}).$$

Suponiendo que este problema admite dos soluciones $u^{(1)}$ y $u^{(2)}$, consideramos a $w := u^{(1)} - u^{(2)}$; entonces w es solución del problema con $f = g = \psi = \varphi \equiv 0$. Demostramos que $w \equiv 0$ de donde se desprende la unicidad $u^{(1)} = u^{(2)}$. Para este fin consideramos la función E_u asociada a una solución u de (20):

$$E_u(t) = \int_V ((u_t)^2 + c^2 (\nabla u)^2) d\mathbf{x}.$$

Esto puede necesitar hipótesis de integrabilidad sobre u_t y $(\nabla u)^2$. Ahora

$$((u_t)^2 + c^2 (\nabla u)^2)_t = 2u_t u_{tt} + 2c^2 (\nabla u) \cdot (\nabla u_t)$$

y, por la fórmula de Green

$$\int_V (\nabla u) \cdot (\nabla u_t) d\mathbf{x} = - \int_V u_t \Delta u d\mathbf{x} + \int_{\partial V} u_t (\nabla u) \cdot d\sigma.$$

Entonces, permutando la derivada temporal con la integración espacial

$$\frac{dE_u}{dt} = \int_V (((u_t)^2 + c^2 (\nabla u)^2)_t) d\mathbf{x} = 2 \int_V (u_t u_{tt} - c^2 u_t \Delta u) d\mathbf{x} + 2 \int_{\partial V} u_t (\nabla u) \cdot d\sigma$$

$$= 2 \int_V u_t \{u_{tt} - c^2 \Delta u\} d\mathbf{x} + 2 \int_{\partial V} u_t (\nabla u) \cdot d\sigma = 2 \int_{\partial V} u_t (\nabla u) \cdot d\sigma .$$

Pero entonces ya que $w \equiv 0$ en ∂V también $w_t \equiv 0$ en ∂V para todo $t \in (-T, T)$ y por ende

$$\frac{dE_w}{dt} = 0 .$$

Ahora, ya que $w(\mathbf{x}, 0) = 0$ también $(\nabla w)(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0}$ y como $w_t(\mathbf{x}) = 0$ obtenemos $E_w(0) = 0$ y por lo tanto $E_w(t) \equiv 0$ en $(-T, T)$. Pero

$$0 = E_w(t) = \int_V ((u_t)^2 + (\nabla u)^2) d\mathbf{x}$$

implica que

$$u_t(\mathbf{x}, t) = 0 = u_{x_j}(\mathbf{x}, t)$$

para todo $t \in (-T, T)$ y todo \mathbf{x} en el interior de V de modo que $u \equiv 0$ en el interior de V para todo $t \in (-T, T)$. De modo que si u es continua, $u \equiv 0$ en $V \times [-T, T]$.

9. 16/04: Propiedades cualitativas de la ec. de ondas (1 dimensión espacial); características; fórmula de d'Alembert para la ec. inhomogenea. Producto escalar en \mathbb{R}^d y vectorial en $d = 3$

Consideraciones sobre la solución del problema de Cauchy para la ec. de ondas en una dimensión espacial basadas en la fórmula de d'Alembert. Características y el triángulo característico de un punto. Zona de influencia de un intervalo espacial arbitrario. Fenómeno de "permanencia". Fórmula de d'Alembert generalizada para el problema de Cauchy de la ec. de ondas inhomogenea (forzada) $u_{tt} = c^2 u_{xx} + F$:

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(f(x+ct) + f(x-ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds + \frac{1}{2c} \iint_{\Delta(x,t)} F(y, s) dy ds ,$$

donde $\Delta(x,t)$ es el triángulo característico del punto (x, t) .

Demostración de esta via la fórmula de Green planar:

$$\int_F (Q_x - P_y) dx dy = \oint_{\partial F} (P dx + Q dy)$$

para funciones P, Q definidas en $F \subset \mathbb{R}^2$ donde las variables ortogonales x e y están positivamente orientadas y la integral de línea se toma en el sentido positivo. Entonces

$$\begin{aligned} \int_{\Delta(x,t)} F(y, s) dy ds &= \int_{\Delta(x,t)} (u_{ss} - c^2 u_{yy}) dy ds = - \int_{\Delta(x,t)} [c^2 (u_y)_y - (u_s)_s] dy ds \\ &= - \oint_{B \cup L_1 \cup L_2} (c^2 u_y ds + u_s dy) , \end{aligned}$$

donde $B \cup L_1 \cup L_2$ es el perímetro del triángulo característico de (x, t) recorrido en el sentido positivo:

$$B = \{(y, 0) : x - ct \leq y \leq x + ct\} , \quad L_1 = \{(y, -(y-x-ct)/c) : x + ct \geq y \geq x\} ,$$

$$L_2 = \{(y, (y-x+ct)/c) : x \geq y \geq x - ct\} .$$

Las integrales de línea se calculan a:

$$\begin{aligned} \int_B (c^2 u_y ds + u_s dy) &= \int_{x-ct}^{x+ct} g(y) dy , \quad \int_{L_1} (c^2 u_y ds + u_s dy) = cf(x+ct, 0) - cu(x, t) , \\ \int_{L_2} (c^2 u_y ds + u_s dy) &= cf(x-ct, 0) - cu(x, t) , \end{aligned}$$

de donde se obtiene la fórmula de d'Alembert generalizada.

Producto escalar en \mathbb{R}^d . Producto vectorial en \mathbb{R}^3 ; tensor totalmente anti-simétrico en tres índices $\epsilon_{j,k,\ell}$; grupo de permutaciones y signo de una permutación (“toda permutación es producto finito de transposiciones y el número de estas involucradas es siempre par o impar”). Propiedades de $\epsilon_{j,k,\ell}$:

$$\epsilon_{\sigma(j,k,\ell)} = \text{sgn}(\sigma)\epsilon_{j,k,\ell}, \text{ para toda permutación } \sigma.$$

$$\sum_{\ell=1}^3 \epsilon_{j,k,\ell}\epsilon_{n,m,\ell} = \delta_{j,n}\delta_{k,m} - \delta_{j,m}\delta_{k,n}, \quad \sum_{k,\ell=1}^3 \epsilon_{j,k,\ell}\epsilon_{n,k,\ell} = 2\delta_{j,n}.$$

10. 21/04: Ec. de ondas en d dimensiones espaciales. Principio de Huygens

Busco extender las propiedades cualitativas geométricas de la ec. de ondas vistas en una sola dimensión espacial al caso de d dimensiones espaciales. Considero entonces la ec. de ondas en la franja $\mathbb{R}^d \times [0, T]$ donde $T > 0$. En el hiperplano $\{(\mathbf{x}, 0) : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d\}$ considero la bola de radio ct_o –para $0 < t_o \leq T$ – alrededor de un punto \mathbf{x}_o dada por

$$B := \{(\mathbf{x}, 0) : |\mathbf{x} - \mathbf{x}_o| \leq ct_o\}.$$

B juega el rol de la base del triángulo característico $[x_o - ct_o, x_o + ct_o] = \{x : |x - x_o| \leq ct_o\}$ en una dimensión espacial. Considere el cono (de vértice (\mathbf{x}_o, t_o) y “base” B cuyo manto está especificado por las superficies características $\{(\mathbf{x}, t) : |\mathbf{x} - \mathbf{x}_o| = c(t_o - t), 0 \leq t \leq t_o\}$)

$$C_{(\mathbf{x}_o, t_o)} := \{(\mathbf{x}, t) : |\mathbf{x} - \mathbf{x}_o| \leq c(t_o - t), 0 \leq t \leq t_o\}.$$

Teorema 10.1 *Si tanto u como u_t se anulan en B entonces u se anula en $C_{(\mathbf{x}_o, t_o)}$.*

Usaremos la siguiente notación. Para \mathbf{x} vector arbitrario y $r \geq 0$

$$B_r(\mathbf{x}) := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d : |\mathbf{y} - \mathbf{x}| \leq r\}$$

es la bola de radio r alrededor de \mathbf{x} mientras que

$$S_r(\mathbf{x}) := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d : |\mathbf{y} - \mathbf{x}| = r\}$$

es su borde la esfera del mismo radio alrededor de \mathbf{x} . Observese que cualquiera sea el campo escalar continuo $\mathbf{y} \mapsto f(\mathbf{y})$ definiendo

$$I(r) := \int_{B_r(\mathbf{x})} f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int_0^r \left(\int_{S_p(\mathbf{x})} f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right) dp,$$

se tiene

$$I'(r) = \int_{S_r(\mathbf{x})} f(\mathbf{y}) d\mathbf{y},$$

para la derivada de I .

Volvemos al Teorema y damos su

Demostración: Usamos el método de la energía que ya fue usado para demostrar unicidad del problema de Cauchy para la ec. de ondas inhomogénea. Consideramos entonces la energía asociada con la bola de radio $c(t_o - t)$ alrededor de \mathbf{x}_o :

$$E(t) := \int_{B_{c(t_o-t)}(\mathbf{x}_o)} (u_t^2 + c^2(\nabla u)^2) d\mathbf{y}, \quad 0 \leq t < t_o.$$

Observe que el dominio de integración depende explícitamente de t . Claramente $E(t) \geq 0$. Como $u \equiv 0$ en $B = B_{ct_o}(\mathbf{x}_o)$ tenemos $\nabla u \equiv \mathbf{0}$ allí de modo que $E(0) = 0$. Para demostrar que $E(t) = 0$ para

$0 \leq t \leq t_o$ basta ver que E' es no-positiva pues entonces $[0, t_o] \ni t \mapsto E(t)$ es no creciente y positiva luego $0 \leq E(t) \leq E(0) = 0$. Calculamos la derivada. Como el dominio de integración depende de t tenemos dos términos

$$E'(t) = 2 \int_{B_{c(t_o-t)}(\mathbf{x}_o)} (u_t u_t^2 + c^2 (\nabla u) \cdot (\nabla u_t)) d\mathbf{y} - c \underbrace{\int_{S_{c(t_o-t)}(\mathbf{x}_o)} (u_t^2 + c^2 (\nabla u)^2) d\mathbf{y}}_{=:A},$$

donde el segundo sumando $-cA$ es la contribución de la derivada de lo que arriba llamamos $I(c(t_o - t))$ para el integrando $(u_t^2 + c^2 (\nabla u)^2)$. El término cuyo integrando es $(\nabla u) \cdot (\nabla u_t)$ en el primer sumando puede reescribirse con la primera identidad de Green:

$$\int_V (g \Delta f + (\nabla g) \cdot (\nabla f)) d\mathbf{y} = \int_{\partial V} g (\nabla f) \cdot \mathbf{n} d\sigma,$$

donde \mathbf{n} denota la normal normalizada hacia el exterior de la región cerrada y acotada V de borde ∂V . Con esta identidad (aplicada con $g = u_t$ y $f = u$) obtenemos

$$E'(t) = -cA + 2 \int_{B_{c(t_o-t)}(\mathbf{x}_o)} (u_t u_t^2 - c^2 u_t \Delta u) d\mathbf{y} + 2c^2 \int_{S_{c(t_o-t)}(\mathbf{x}_o)} u_t (\nabla u) \cdot \mathbf{n} d\mathbf{y}.$$

El segundo término se anula en virtud de la ec. de ondas. Para el tercer término tenemos

$$\left| \int_{S_{c(t_o-t)}(\mathbf{x}_o)} u_t (\nabla u) \cdot \mathbf{n} d\mathbf{y} \right| \leq \int_{S_{c(t_o-t)}(\mathbf{x}_o)} |u_t| |(\nabla u) \cdot \mathbf{n}| d\mathbf{y};$$

pero, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$|(\nabla u(\mathbf{y}, t)) \cdot (\mathbf{n}(\mathbf{y}))| \leq |\nabla u(\mathbf{y}, t)| |\mathbf{n}(\mathbf{y})| = |\nabla u(\mathbf{y}, t)|,$$

de modo que

$$\left| \int_{S_{c(t_o-t)}(\mathbf{x}_o)} u_t (\nabla u) \cdot \mathbf{n} d\mathbf{y} \right| \leq \int_{S_{c(t_o-t)}(\mathbf{x}_o)} |u_t| |(\nabla u)| d\mathbf{y} = \frac{1}{c} \int_{S_{c(t_o-t)}(\mathbf{x}_o)} |u_t| |c(\nabla u)| d\mathbf{y}.$$

Ahora,

$$|u_t(\mathbf{y}, t)| |c(\nabla u)(\mathbf{y}, t)| \leq \frac{1}{2} \{ (u_t(\mathbf{y}, t))^2 + [c|(\nabla u)(\mathbf{y}, t)|]^2 \},$$

con lo cual

$$\int_{S_{c(t_o-t)}(\mathbf{x}_o)} |u_t| |c(\nabla u)| d\mathbf{y} \leq \frac{1}{2} \int_{S_{c(t_o-t)}(\mathbf{x}_o)} (u_t)^2 + c^2 (\nabla u)^2 d\mathbf{y} = \frac{1}{2} A.$$

Con lo cual demostramos que

$$\left| 2c^2 \int_{S_{c(t_o-t)}(\mathbf{x}_o)} u_t (\nabla u) \cdot \mathbf{n} d\mathbf{y} \right| \leq cA$$

y por ende $E'(t) \leq -cA + cA = 0$ de donde obtenemos $E(t) = 0$ en $[0, t_o]$.

De la nulidad de $E(t)$ para todo $t \in [0, t_o]$ se desprende que $u_t = 0$ y que $\nabla u = \mathbf{0}$ en $B_{c(t_o-t)}(\mathbf{x}_o)$ para los mismos t con lo cual $u \equiv 0$ en el cono especificado. ■

Después de ver que la observación hecha en una dimensión espacial sobre la “zona de influencia” de datos iniciales persiste en cualquier dimensión espacial, pasamos a considerar el caso de tres dimensiones espaciales ($d = 3$) que como veremos es sumamente particular (*Principio de Huygens*). Comenzamos este análisis con el estudio de soluciones radiales. Buscamos entonces soluciones u de la ec. de ondas en $\mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$ que dependan solamente del radio con condiciones iniciales que tengan la misma propiedad

$$(23) \quad u(\mathbf{x}, 0) = f(|\mathbf{x}|), \quad u_t(\mathbf{x}, 0) = g(|\mathbf{x}|)$$

con f y g funciones definidas en $[0, \infty)$. Si $u(\mathbf{x}, t) = v(|\mathbf{x}|, t)$ con v definida en $[0, \infty) \times [0, \infty)$ entonces v satsiface la ec. de ondas radial (en 3 + 1 dimensiones):

$$v_{tt} = c^2(v_{rr} + 2v_r/r).$$

El truco $\rho(r, t) = rv(r, t)$ conduce a

$$\rho_{tt} = c^2\rho_{rr}$$

que es la ec. de ondas unidimensional pero con la condición de borde $\rho(0, t) = 0$. Las condiciones iniciales son

$$\rho(r, 0) = rf(r), \quad \rho_t(r, 0) = rg(r).$$

Si extendemos a f y a g a funciones pares \tilde{f} y \tilde{g} sobre toda la recta real con $\tilde{f}(-x) = f(x)$ y $\tilde{g}(-x) = g(x)$ para $x < 0$, la fórmula de d'Alembert nos da la solución¹⁶

$$(24) \quad \rho(r, t) = \frac{1}{2} \left\{ (r+ct)\tilde{f}(r+ct) + (r-ct)\tilde{f}(r-ct) \right\} + \frac{1}{2c} \int_{r-ct}^{r+ct} y\tilde{g}(y)dy, \quad t \geq 0,$$

para la cual

$$\rho(0, t) = \frac{1}{2} \left\{ ct\tilde{f}(ct) - ct\tilde{f}(-ct) \right\} + \frac{1}{2c} \int_{-ct}^{ct} y\tilde{g}(y)dy = 0,$$

ya que \tilde{f} es par y ya que el integrando $y \mapsto y\tilde{g}(y)$ es impar. El manipuleo de la integral muestra que podemos reescribir

$$\rho(r, t) = \frac{1}{2} \left\{ (r+ct)f(r+ct) + (r-ct)f(|r-ct|) \right\} + \frac{1}{2c} \int_{|r-ct|}^{r+ct} yg(y)dy,$$

donde todo está en términos de los datos de Cauchy originales f y g . Obtenemos entonces la solución radial del problema de valores iniciales

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \left\{ f(|\mathbf{x}|+ct) + f(|\mathbf{x}|-ct) \right\} + \frac{ct}{2} \left\{ \frac{f(|\mathbf{x}|+ct) - f(|\mathbf{x}|-ct)}{|\mathbf{x}|} \right\} + \frac{1}{2c|\mathbf{x}|} \int_{||\mathbf{x}|-ct|}^{|\mathbf{x}|+ct} yg(y)dy.$$

Observe que

$$u(\mathbf{0}, t) = f(ct) + ct f'(ct) + tg(ct).$$

11. 23/04: La ec. de ondas en $d = 2, 3$ dimensiones espaciales. Demostración de la fórmula de Poisson (Kirchhoff). Principio de Huygens

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{S_{ct}(\mathbf{x})} g(\mathbf{y})d\mathbf{y} + \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{S_{ct}(\mathbf{x})} g(\mathbf{y})d\mathbf{y} \right\}, \quad t > 0,$$

usando promedios

$$\bar{u}(r, t) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{S_r(\mathbf{0})} u(\mathbf{y}, t)d\mathbf{y}, \quad r \geq 0, \quad t > 0,$$

sobre la esfera de radio arbitrario alrededor de $\mathbf{0}$ para obtener $u(\mathbf{0}, t)$ y luego $u(\mathbf{x}, t)$ por traslación.

Consideración de la propagación cuando f y g tienen ambos soporte finito y deducción del Principio de Huygens fuerte. Si \mathbf{x} no está en la unión del soporte de f con el soporte de g entonces hay $t_1 > 0$ tal que $u(\mathbf{x}, t) = 0$ para todo $t < t_1$ y hay $t_2 > t_1$ tal que $u(\mathbf{x}, t) = 0$ para todo $t > t_2$.

¹⁶Observe que $r \mapsto r\tilde{f}(r)$ y $r \mapsto r\tilde{g}(r)$ son ambas impares si tomamos extensión par de f y de g ; entonces $r \mapsto \rho(r, t)$ será impar con lo cual $\rho(0, t) = 0$. pero esto se verá explícitamente luego.

La ec. de ondas en dos dimensiones espaciales y desarrollo de la la solución por restricción dimensional para obtener:

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi c} \int_{B_{ct}(\mathbf{x})} \frac{g(\mathbf{y})}{\sqrt{c^2 t^2 - |\mathbf{x}|^2}} d\mathbf{y} + \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{2\pi c} \int_{B_{ct}(\mathbf{x})} \frac{g(\mathbf{y})}{\sqrt{c^2 t^2 - |\mathbf{x}|^2}} d\mathbf{y} \right\}, \quad t > 0.$$

Consideración de la propagación cuando f y g tienen ambos soporte finito y deducción de c como velocidad de propagación máxima y del fenómeno de permanencia. Si \mathbf{x} no está en la unión del soporte de f con el soporte de g entonces hay $t_1 > 0$ tal que $u(\mathbf{x}, t) = 0$ para todo $t < t_1$ y hay $t_2 > t_1$ tal que $u(\mathbf{x}, t)$ no depende de t para todo $t > t_2$.

12. 24/04: Ecuaciones de potencial (Poisson, Laplace); funciones armónicas. Problemas de Dirichlet, Neumann y Robin. Principio Extremal.

[Recuperación de una clase perdida]. Ecuaciones de potencial: ec. de Poisson $\Delta u = f$ en $V \subset \mathbb{R}^d$ y Laplace (caso $f = 0$). Funciones armónicas. Paradigma de la EDP lineal elíptica.

1. Caso unidimensional.
2. Relación necesaria para la solubilidad de la ec. Poisson

$$\int_V f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\partial V} (\nabla u) \cdot \mathbf{n} d\sigma,$$

donde $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ es la normal exterior en $\mathbf{x} \in \partial V$. En particular para una función armónica φ se tiene

$$\int_H (\nabla \varphi) \cdot \mathbf{n} d\sigma = 0$$

para toda hipersuperficie $(d-1)$ -dimensional (suave) H contenida en V .

3. No hay unicidad de la solución. Al contrario: hay enormes cantidades de funciones armónicas. Y $v = u + h$ con $\Delta u = f$ y h armónica es solución ya que $\Delta v = f$. En general se espera unicidad si se imponen condiciones de borde (cuando lo hay) o condiciones sobre el comportamiento asintótico (cuando no hay borde).
 - a) (Problema de Dirichlet). Se especifica el valor de u en ∂V : $u = g$ en ∂V .
 - b) (Problema de Neumann). Se especifica el valor del gradiente de u proyectado sobre la normal en el borde: $(\nabla u) \cdot \mathbf{n} = g$ en ∂V .
 - c) (Problema mixto o de Robin). Se especifica $u + \alpha(\nabla u) \cdot \mathbf{n} = g$ en ∂V con α y g definidas en el borde.

En estos tres casos se tienen resultados de unicidad bajo hipótesis razonables sobre ∂V y los datos dados.

4. "Inestabilidad". Ejemplo de Hadamard: En $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ la ec. de Laplace con $u(x, 0) = 0$ y $u_y(x, 0) = \sin(\lambda x)/\lambda$ ($\lambda > 0$) tiene la solución $u_\lambda(x, y) = \lambda^{-2} \sin(\lambda x) \sinh(\lambda y)$. Ya que $|u_y(x, 0)| \leq \lambda^{-1}$ la condición en el borde $\partial V = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ es una perturbación pequeña de la condición homogénea $u = u_y = 0$ en ∂V para λ grande. Sin embargo para x fijo no igual a $m\pi/\lambda$ la solución crece exponencialmente con y lo que no es una perturbación pequeña de la solución trivial.
5. Armónicas polinomiales. Si $N \geq 2$

$$u(x_1, x_2, \dots, x_d) = \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_d \leq N} c_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_d^{\alpha_d}$$

será armónica si los coeficientes $c_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d}$ satisfacen ciertas ecuaciones lineales que admiten en general muchas soluciones linealmente independientes (e.g. $x^2 - y^2 + 2x$, $xy + 3y - 7$, etc.).

6. Armónicas radiales en $d = 2$. En caso de que u sea radial en \mathbb{R}^2 conlleva $u_{rr} + r^{-1}u_r = 0$ una ODE de Euler con raíz del polinomio indicial cero (doble). Las soluciones son $u_1 = \text{const.}$ y $u_2(r) = -(1/2\pi) \ln(r)$ que no es regular en el origen (el factor es cuestión de conveniencia solamente). u_2 es la llamada solución fundamental y es la única no trivial que es radial.

7. (Principio extremal débil). Una función armónica asume su máximo y su mínimo en el borde. I.e.:

$$\min_{\partial V} u \leq u(\mathbf{x}) \leq \max_{\partial V} u, \quad \mathbf{x} \in V.$$

Demostración: Considere $v(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}) + \delta|\mathbf{x}|^2$ con $\delta > 0$. Vea que $\Delta v > 0$ de modo que no hay máximos locales adentro. Sea $M := \max_{\partial V} u$ y $L := \max_{\partial V} |\mathbf{x}|^2$. Entonces, cualquiera sea \mathbf{x}

$$v(\mathbf{x}) \leq \max_{\partial V} v \leq M + \delta L;$$

luego

$$u(\mathbf{x}) = v(\mathbf{x}) - \delta|\mathbf{x}|^2 \leq M + \delta(L - |\mathbf{x}|^2).$$

Dado \mathbf{x} y $\epsilon > 0$, hay $\delta > 0$ de modo que $\delta(L - |\mathbf{x}|^2) < \epsilon$ y entonces $u(\mathbf{x}) < M + \epsilon$. Luego ya que $\epsilon > 0$ era arbitrario, $u(\mathbf{x}) \leq M$. Pero $-u$ es armónica de modo que $-u(\mathbf{x}) \leq \max_{\partial V}(-u) = -\min_{\partial V} u$. ■

8. Medias esféricas y Principio Extremal fuerte. FALTA RELLENAR

13. 28/04: Unicidad en el problema de Dirichlet. Problema de Dirichlet para el disco, fórmula de Poisson.

Algunas consecuencias y comentarios. El Principio Extremal no vale en dominios no acotados; ejemplo: $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ en $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1\}$ con borde $\partial V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ satisface $u \equiv 0$ en ∂V pero $u > 0$ en V .

Unicidad del problema Dirichlet via Principio extremal (débil o fuerte).

Teorema 13.2 Si u es armónica en \mathbb{R}^d con $\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} u(\mathbf{x}) = 0$ entonces $u \equiv 0$.

Demostración: Dado $\epsilon > 0$ hay $r_o > 0$ tal que $|u(\mathbf{x})| \leq \epsilon$ si \mathbf{x} está fuera de la bola $B_{r_o}(\mathbf{0})$. Dado $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$ elija $r > 0$ tal que $B_{r_o}(\mathbf{0}) \subset B_r(\mathbf{y})$ entonces

$$|u(\mathbf{y})| = |S_r|^{-1} \left| \int_{S_r(\mathbf{y})} u d\mathbf{z} \right| \leq |S_r|^{-1} \int_{S_r(\mathbf{y})} |u| d\mathbf{z} \leq \epsilon.$$

■

Teorema 13.3 Si $V \subset \mathbb{R}^d$ es un abierto acotado de borde suave ∂V entonces:

1. El problema de Dirichlet en V tiene a lo sumo una solución.
2. Si u y v son soluciones del problema de Neumann para V entonces $u - v$ es constante en V .
3. Si $\alpha \geq 0$ en ∂V entonces el problema mixto en V tiene a lo sumo una solución.

Demostración: 1. es consecuencia de 3. tomando $\alpha \equiv 0$.

En los casos 2. y 3. suponemos que u y v son soluciones de la ec. de Poisson con fuente f . Definiendo $w := u - v$ se tiene $\Delta w = 0$ con lo cual w es armónica. Por la primera identidad de Green

$$(25) \quad \int_V (\nabla w)^2 d\mathbf{x} = \int_{\partial V} w(\nabla w) \cdot \mathbf{n} d\sigma.$$

En el caso 2., $(\nabla w) \cdot \mathbf{n} = (\nabla u) \cdot \mathbf{n} - (\nabla v) \cdot \mathbf{n} = g - g = 0$ en ∂V de modo (25) implica que $\nabla w = \mathbf{0}$ en V de donde w es constante en V .

En el caso 3., tenemos $w + \alpha(\nabla w) \cdot \mathbf{n} = u + \alpha(\nabla u) \cdot \mathbf{n} - [v + (\nabla v) \cdot \mathbf{n}] = g - g = 0$ y luego $w = -\alpha(\nabla w) \cdot \mathbf{n}$ en ∂V de modo que con (25)

$$\int_V (\nabla w)^2 d\mathbf{x} = - \int_{\partial V} \alpha [(\nabla w) \cdot \mathbf{n}]^2 d\sigma .$$

Si $\alpha \geq 0$ el miembro izquierdo es mayor o igual a 0 y el miembro derecho es menor o igual a 0. Se sigue que $\nabla w = \mathbf{0}$ en V y que $w = 0$ en ∂V de modo que $w \equiv 0$ en V . ■

Teorema 13.4 Si u es $C^2(V)$ para un abierto acotado V y satisface la propiedad del promedio esférico en todo punto de V entonces u es armónica en V .

Demostración: Suponga que hay $\mathbf{x}_o \in V$ con $\Delta u(\mathbf{x}_o) \neq 0$. Considerando $-u$ si fuere necesario, podemos suponer que $\Delta u(\mathbf{x}_o) > 0$. Hay entonces $r > 0$ tal que $\Delta u(\mathbf{x}) > 0$ para todo $\mathbf{x} \in B_r(\mathbf{x}_o)$ y, además, $B_r(\mathbf{x}_o) \subset V$. Entonces

$$0 < \int_{B_r(\mathbf{x}_o)} \Delta u d\mathbf{x} = \int_{S_r(\mathbf{x}_o)} (\nabla u) \cdot \mathbf{n} d\sigma .$$

Pero

$$(\nabla u) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}_o + r\mathbf{e}) = \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right) (\mathbf{x}_o + r\mathbf{e}) ,$$

de modo que

$$\begin{aligned} \int_{S_r(\mathbf{x}_o)} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right) (\mathbf{x}_o + r\mathbf{e}) d\sigma &= r^{d-1} \int_{S_1(\mathbf{x}_o)} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right) (\mathbf{x}_o + r\mathbf{e}) d\mathbf{e} = r^{d-1} \left(\frac{\partial}{\partial r} \int_{S_1(\mathbf{x}_o)} u(\mathbf{x}_o + r\mathbf{e}) d\mathbf{e} \right) \\ &= r^{d-1} |S_1| \frac{\partial}{\partial r} \left(|S_1|^{-1} \int_{S_1(\mathbf{x}_o)} u(\mathbf{x}_o + r\mathbf{e}) d\mathbf{e} \right) = |S_r| \frac{\partial}{\partial r} (u(\mathbf{x}_o)) = 0 , \end{aligned}$$

donde usamos la propiedad del promedio para $u(\mathbf{x}_o)$. Entonces $0 < \int_{B_r(\mathbf{x}_o)} \Delta u d\mathbf{x} = 0$ y esto implica que no puede existir \mathbf{x}_o . ■

Problema de Dirichlet para el disco en \mathbb{R}^2 : Separación de variables y serie de Fourier para la condición de Dirichlet $u(a, \varphi) = h(\varphi)$. Fórmula de Poisson:

$$(26) \quad u(r, \varphi) = \frac{(a^2 - r^2)}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{h(\varphi')}{a^2 - 2ar \cos(\varphi - \varphi') + r^2} d\varphi' .$$

14. 30/04: Motivaciones hacia las distribuciones. Segunda identidad de Green y fórmula de representación de Green para el problema de Dirichlet de la ecuación de Poisson.

FALTA

15. 7/05: Distribuciones.

FALTA

16. 12/05: Funciones de Green I (Laplaciano)

Partiendo de la segunda identidad de Green

$$(27) \quad \int_V (u\Delta v - v\Delta u) d\mathbf{x} = \int_{\partial V} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\mathbf{x}$$

y usando las soluciones fundamentales (soluciones radiales de la ec. de Laplace con singularidad puntual) hemos obtenido las fórmulas de Poisson (26) en dos dimensiones y en tres dimensiones

$$(28) \quad u(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial V} \left\{ -u(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right) + \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{y}) \right\} d\mathbf{y},$$

para armónicas u en un dominio V . Estas fórmulas expresan los valores de u en V en términos de los valores de u y de su derivada direccional normal en el borde ∂V de V . Mencionamos ya la idea de ‘corregir’ las soluciones fundamentales Γ con una función armónica suave v de modo que $\Gamma + v$ se anule en ∂V ; en tal caso (28) nos entrega una fórmula para u que **sólo involucra los valores de u en el borde** y esta es entonces la solución del problema de Dirichlet para la ec. de Laplace. Esta es la idea básica detrás de las funciones de Green.

Dado un punto $\mathbf{x}_o \in V$ la función de Green (más específicamente la función de Green para el problema de Dirichlet) del Laplaciano en el abierto $V \subset \mathbb{R}^d$ es una función $\bar{V} \ni \mathbf{x} \mapsto G(\mathbf{x}; \mathbf{x}_o)$ tal que

1. $G(\cdot; \mathbf{x}_o)$ es armónica en V salvo en \mathbf{x}_o ; o sea en el abierto $V \setminus \{\mathbf{x}_o\}$.
2. $G(\cdot; \mathbf{x}_o)$ es nula en ∂V .
3. $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_o) - \Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{x}_o)$ es finito para $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_o} \mathbf{x} = \mathbf{x}_o$.

En el sentido de distribuciones la función de Green del Laplaciano satisface

$$(29) \quad \Delta G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_o) = \delta_{\mathbf{x}_o}(\mathbf{x}) \text{ en } V \text{ y } G(\cdot, \mathbf{x}_o) = 0 \text{ en } \partial V.$$

Teorema 16.1 *Si G es la función de Green del Laplaciano entonces:*

1. *la solución del problema de Dirichlet de la ec. de Poisson, $\Delta u = f$ en V y $u = g$ en ∂V , satisface*

$$u(\mathbf{x}_o) = \int_V G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_o) f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\partial V} g(\mathbf{x}) \frac{\partial G}{\partial n}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_o) d\sigma(\mathbf{x}).$$

2. $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = G(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \bar{V}$ con $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$.
3. G es única.

¿Existencia de la función de Green? El análisis de la solubilidad de (29) conduce a la existencia. Otra idea: deformación suave de un dominio que tiene función de Green conduce a la existencia de la función de Green del dominio deformado.

Ejercicio: Verifique que la función de Green del semiespacio $V := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x_3 > 0\}$ de borde $\partial V = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 0\}$ es

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) = \frac{-1}{4\pi} \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} - \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}^*|} \right),$$

donde $\mathbf{y}^* = (y_1, y_2, -y_3)$ es la reflexión de $\mathbf{y} \in V$ en ∂V .

Ejemplo: La función de Green para el Laplaciano en la bola. $V = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{x}| < R\}$, $\partial V = S_R(\mathbf{0})$. Para $\mathbf{0} \neq \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ sea

$$\mathbf{x}^* := R^2 \mathbf{x} / |\mathbf{x}|^2.$$

Entonces $|\mathbf{x}^*| = R^2 / |\mathbf{x}|$ de modo que si $|\mathbf{x}| \leq R$ se tiene $|\mathbf{x}^*| \geq R$. Además, cuando $|\mathbf{x}| = R$ se tiene $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}$.

Lema 3 *Si $\mathbf{x} \neq \mathbf{0} \neq \mathbf{y}$ entonces $|\mathbf{x}| |\mathbf{y} - \mathbf{x}^*| = |\mathbf{y}| |\mathbf{x} - \mathbf{y}^*|$.*

Demostración: Tomamos cuadrados y calculamos

$$|\mathbf{x}|^2 |\mathbf{y} - \mathbf{x}^*|^2 = |\mathbf{x}|^2 (|\mathbf{y}|^2 + R^4 |\mathbf{x}|^{-2} - 2R^2 |\mathbf{x}|^{-2} \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = |\mathbf{x}|^2 |\mathbf{y}|^2 + R^4 - 2R^2 \mathbf{x} \cdot \mathbf{y};$$

$$|\mathbf{y}|^2 |\mathbf{x} - \mathbf{y}^*| = |\mathbf{y}|^2 (|\mathbf{x}|^2 + R^4 |\mathbf{y}|^{-2} - 2R^2 |\mathbf{y}|^{-2} \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = |\mathbf{x}|^2 |\mathbf{y}|^2 + R^4 - 2R^2 \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} .$$

■

Por lo tanto si $|\mathbf{x}| = R$ tenemos

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}_o| = |\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_o| = \frac{|\mathbf{x}_o|}{R} |\mathbf{x} - \mathbf{x}_o^*| .$$

Luego con

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \frac{R}{|\mathbf{y}|} \Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) = \frac{-1}{4\pi} \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} - \frac{R}{|\mathbf{y}| |\mathbf{x} - \mathbf{y}^*|} \right)$$

y $G(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = \Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{0}) - 1/R$, la función $\mathbf{x} \mapsto G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ es armónica en V salvo en \mathbf{y} (pues $\Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{a})$ lo es en \mathbb{R}^3 salvo en $\mathbf{x} = \mathbf{a}$). Se tiene para $\mathbf{x} \in \partial V$ que

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{-1}{4\pi} \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} - \frac{R}{|\mathbf{y}| |\mathbf{x} - \mathbf{y}^*|} \right) = 0 .$$

Y, claramente, la propiedad 3. de la definición de la función de Green se cumple. Entonces G es la función de Green de la bola de radio R . Para calcular $K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \frac{\partial G}{\partial n}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ el llamado núcleo de Poisson observamos que:

$$\nabla |\mathbf{x} - \mathbf{a}| = (\mathbf{x} - \mathbf{a}) / |\mathbf{x} - \mathbf{a}| ;$$

luego

$$\nabla G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_o) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_o}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_o|^3} - \frac{R(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o^*)}{|\mathbf{x}_o| |\mathbf{x} - \mathbf{x}_o^*|^3} \right) ;$$

entonces si $\mathbf{x} \in \partial V$

$$\nabla G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_o) = \frac{1}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{x}_o|^3} \left(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o - \frac{|\mathbf{x}_o|^2}{R^2} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_o^*) \right) = \frac{\mathbf{x}}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{x}_o|^3} (1 - |\mathbf{x}_o|^2 / R^2) ;$$

de modo que

$$\frac{\partial}{\partial n} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_o) = \nabla G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_o) \cdot \frac{\mathbf{x}}{R} = \frac{R^2 - |\mathbf{x}_o|^2}{4\pi R |\mathbf{x} - \mathbf{x}_o|^3} .$$

El núcleo de Poisson es entonces

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{R^2 - |\mathbf{x}_o|^2}{4\pi R |\mathbf{x} - \mathbf{x}_o|^3} .$$

Formulamos el resultado multidimensional

Teorema 16.2 Si $V \subset \mathbb{R}^d$ es un abierto acotado de borde suave ∂V entonces

1. El Laplaciano tiene una función de Green G para el problema de Dirichlet en \bar{V} que es única.
2. $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = G(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \bar{V}$ con $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$.
3. Para cualquier $\mathbf{y} \in \bar{V}$ fijo la función $\bar{V} \ni \mathbf{x} \mapsto G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ es negativa y armónica en $V \setminus \{\mathbf{y}\}$ y se anula en ∂V .
4. Para cualquier $\mathbf{x} \in \partial V$ fijo la función $\bar{V} \ni \mathbf{y} \mapsto K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\nabla_{\mathbf{x}} G)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})$ es positiva y armónica en V y se anula en $\partial V \setminus \{\mathbf{x}\}$.
5. Si V_1 y V_2 son abiertos acotados de borde suave en \mathbb{R}^d con funciones de Green G_1 y G_2 respectivamente y si $V_1 \subset V_2$ entonces se tiene

$$0 \geq G_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq G_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq \Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) ,$$

para $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \bar{V}_1$.

El ejemplo de la bola en \mathbb{R}^3 se puede extender a cualquier dimensión (con el Lema). Sea

$$\Gamma_d(r) := \frac{-1}{d(d-2)|B_1|r^{d-2}}, \quad d \geq 3,$$

donde $|B_1|$ denota el volumen de la bola $B_1(\mathbf{0})$ de radio 1 en \mathbb{R}^d ; i.e. $|B_1| = \pi^{d/2}/\Gamma(1+d/2) = 2\pi^{d/2}/(d\Gamma(d/2))$ siendo ahora Γ la función gamma de Euler. Entonces

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \begin{cases} \Gamma_d(|\mathbf{x}|) - \Gamma_d(R) & , \quad \text{si } \mathbf{y} = \mathbf{0} \\ \Gamma_d(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) - \Gamma_d\left(\frac{|\mathbf{y}|}{R}|\mathbf{x} - \mathbf{y}^*|\right) & , \quad \text{si } \mathbf{y} \neq \mathbf{0} \end{cases},$$

donde $\mathbf{y}^* = (R^2/|\mathbf{y}|^2)\mathbf{y}$, es la función de Green de la bola (abierta) de radio R en \mathbb{R}^d y el núcleo de Poisson asociado es

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{R^2 - |\mathbf{y}|^2}{d|B_1|R} |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{-d}.$$

17. 14/05: Funciones de Green II

FALTA

18. 19/05: Armónicas que separan en coordenadas esféricas (Funciones esféricas)

Vea las notas *Funciones esféricas* que están en la w-página.

19. 21/05: Problemas de autovalores. Sobre todo para Δ . Funciones de Bessel

El problema de autovalores para el Laplaciano en un abierto acotado $V \subset \mathbb{R}^d$ de borde suave consiste en encontrar $\lambda \in \mathbb{C}$ y u definida en \bar{V} no nula de modo que

$$-\Delta u = \lambda u \quad \text{en } V$$

y alguna de las siguientes condiciones en el borde ∂V :

- (D) Dirichlet: $u = 0$ en ∂V .
- (N) Neumann: $(\partial u / \partial n) = (\nabla u) \cdot \mathbf{n} = 0$ en ∂V donde $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ es la normal (exterior) en $\mathbf{x} \in \partial V$.
- (R) Robin: $u + \alpha(\partial u / \partial n) = 0$ en ∂V , donde α es una función real no-negativa en ∂V .

En tal caso, $-\lambda$ es autovalor de Δ y u es autofunción a ese autovalor. Con $L^2(V)$ se denota el espacio de Hilbert complejo de las funciones f complejas definidas en V que satisfacen

$$\|f\|^2 := \int_V |f(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} < \infty.$$

El producto escalar asociado es

$$\langle f, g \rangle := \int_V \overline{f(\mathbf{x})} g(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Veamos que en los tres casos el Laplaciano resulta ser simétrico respecto de este producto escalar. En efecto si tanto u como v satisfacen cualquiera de las tres condiciones en ∂V entonces la segunda identidad de Green nos da:

$$\langle u, \Delta v \rangle - \langle \Delta u, v \rangle = \int_V (\overline{u}(\Delta v) - v(\Delta \overline{u})) d\mathbf{x} = \int_{\partial V} \left(\overline{u} \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial \overline{u}}{\partial n} \right) d\sigma;$$

Tanto en (D) como en (N) la integral sobre el borde se anula; en el caso (R) el integrando en el borde es¹⁷

$$\left(\bar{u} \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} \right) = \left(-\alpha \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} \frac{\partial v}{\partial n} + \alpha \frac{\partial v}{\partial n} \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} \right) = 0.$$

En los tres casos entonces

$$(30) \quad \langle u, \Delta v \rangle = \langle \Delta u, v \rangle.$$

Supongamos que $-\lambda$ sea autovalor con autofunción correspondiente u . Entonces $\Delta \bar{u} = -\bar{\lambda} \bar{u}$ y por la simetría

$$\lambda \langle u, u \rangle = \langle u, \lambda u \rangle = \langle u, -\Delta u \rangle = -\langle \Delta u, u \rangle = -\int_V (\overline{\Delta u}) u \, d\mathbf{x} = -\int_V (\Delta \bar{u}) u \, d\mathbf{x} = \bar{\lambda} \langle u, u \rangle;$$

o sea $(\lambda - \bar{\lambda})\|u\|^2 = 0$ de donde $\lambda = \bar{\lambda}$ ya que $u \neq 0$. Los autovalores son reales. Pero además, por la primera identidad de Green,

$$\begin{aligned} -\lambda \|u\|^2 &= \langle u, \Delta u \rangle = \int_V \bar{u} \Delta u \, d\mathbf{x} = -\int_V (\nabla \bar{u}) \cdot (\nabla u) \, d\mathbf{x} + \int_{\partial V} \bar{u} \frac{\partial u}{\partial n} \, d\sigma \\ &= -\int_V (\overline{\nabla u}) \cdot (\nabla u) \, d\mathbf{x} + \int_{\partial V} \bar{u} \frac{\partial u}{\partial n} \, d\sigma = -\int_V |\nabla u|^2 \, d\mathbf{x} + \int_{\partial V} \bar{u} \frac{\partial u}{\partial n} \, d\sigma; \end{aligned}$$

en los casos (D) y (N) la integral sobre el borde se anula y en el caso (R) tenemos

$$\int_{\partial V} \bar{u} \frac{\partial u}{\partial n} \, d\sigma = -\int_{\partial V} \alpha \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} \frac{\partial u}{\partial n} \, d\sigma = -\int_{\partial V} \alpha \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|^2 \, d\sigma$$

que es manifiestamente no-positivo cuando $\alpha \geq 0$. De modo que en los tres casos

$$\lambda \|u\|^2 \geq \int_V |\nabla u|^2 \, d\mathbf{x}$$

de donde deducimos que $\lambda \geq 0$ pues $\|u\| \neq 0$. Además, si $\lambda = 0$ obtenemos $\nabla u = 0$ y por ende $u = \text{const.}$ y, en el tal caso, para la condición (D) necesariamente $u = 0$ lo que contradice la hipótesis de que $\lambda (= 0)$ es autovalor. En cambio para la condición (N) $u = \text{const.}$ no-nula es autofunción al autovalor 0. En el caso (R) 0 es autovalor si α es una constante no-nula. En resumen:

Teorema 19.1 *Si $-\lambda$ es autovalor de Δ entonces $\lambda \geq 0$ en cualquiera de los tres casos; $\lambda > 0$ en el caso (D) o (R) cuando α no es constante. 0 es autovalor para la condición (N) o para (R) con α una constante no-nula.*

Ya que si u es autofunción también \bar{u} y $-u$ son autofunciones al mismo autovalor, tanto $(u + \bar{u})/2$ como $(u - \bar{u})/(2i)$ son autofunciones reales al mismo autovalor.

Considere ahora dos autovalores λ_1 y λ_2 con autofunciones asociadas u_1 y u_2 respectivamente. Por la simetría (30)

$$-\lambda_1 \langle u_1, u_2 \rangle = \langle \Delta u_1, u_2 \rangle = \langle u_1, \Delta u_2 \rangle = -\lambda_2 \langle u_1, u_2 \rangle;$$

por lo tanto $(\lambda_1 - \lambda_2)\langle u_1, u_2 \rangle = 0$ ergo:

Teorema 19.2 *Las autofunciones a autovalores distintos del Laplaciano en V con condición (D),(N) o (R) son ortogonales.*

Laplaciano en una bola de \mathbb{R}^3 Consideramos un ejemplo concreto: $V = B_R$ la bola (abierta) de radio R en \mathbb{R}^3 . Buscamos los autovalores $-\lambda$ que admiten autofunciones u para las cuales $u(\mathbf{x}) = R(r)Y(\hat{\mathbf{x}})$ donde $r = |\mathbf{x}|$. La teoría de las funciones esféricas desarrollada nos indica que necesariamente Y es una función esférica de algún orden $\ell \in \mathbb{N}$. En particular Y es combinación lineal de los armónicos esféricos Y_ℓ^m con $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \ell$. La ODE radial es entonces

$$r^2 R'' + 2r R' + (\lambda r^2 - \ell(\ell + 1))R = 0.$$

¹⁷Aquí usamos que α es real.

La posibilidad $\lambda = 0$ donde $R(r) = r^\ell$ puede cumplir eventualmente una condición de borde (N) o (R) pero nunca (D). Analizado esto, seguimos con $\lambda > 0$. En ese caso la transformación $z = \sqrt{\lambda}r$ nos conduce a la ec. diferencial de Bessel esférica¹⁸ de orden ℓ

$$z^2 X'' + 2zX' + (z^2 - \ell(\ell + 1))X = 0$$

para la función $X(z) := R(z/\sqrt{\lambda})$. La única solución regular es la función de Bessel esférica $j_\ell(z)$ que se expresa como

$$j_\ell(z) = \sqrt{\pi/(2z)} J_{\ell+1/2}(z)$$

en términos de la función de Bessel de orden (semi-entero) $\ell + 1/2$. Por lo tanto la condición para un autovalor $-\lambda$ es

- (D): $j_\ell(\sqrt{\lambda}R) = 0$.
- (N): $j'_\ell(\sqrt{\lambda}R) = 0$.
- (R) Suponiendo que α es radial o sea $\alpha(R, \hat{\mathbf{x}}) = c > 0$: $j_\ell(\sqrt{\lambda}R) + a\sqrt{\lambda} j'_\ell(\sqrt{\lambda}R) = 0$.

Para poder seguir necesitamos el siguiente resultado fundamental

Teorema 19.3 Para ν real no-negativo la ec. diferencial de Bessel

$$(31) \quad z^2 X'' + zX' + (z^2 - \nu^2)X = 0,$$

admite dos soluciones linealmente independientes J_ν y Y_ν en el plano complejo sin el semi-eje real negativo $\{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) = 0, \text{Re}(z) \leq 0\}$. La función de Bessel J_ν es regular en $z = 0$ mientras que la función de Neumann (o de Weber, o de Bessel de segunda especie) Y_ν tiene en $z = 0$ una singularidad logarítmica para $\nu = 0$ y un polo de orden ν para $\nu > 0$.

$$J_\nu(z) \asymp \frac{(z/2)^\nu}{\Gamma(\nu + 1)}, \quad Y_\nu(z) \asymp \begin{cases} -\frac{\Gamma(\nu)}{\pi(z/2)^\nu} & , \nu > 0 \\ (2\pi) \ln(z) & , \nu = 0 \end{cases}$$

Ambas funciones tienen denumerablemente infinitos ceros no-negativos que son simples con la posible excepción del cero 0. Denotando con $\{\xi_{\nu,k} : k = 1, 2, \dots\}$ y con $\{\eta_{\nu,k} : k = 1, 2, \dots\}$ los ceros no-negativos de J_ν y de J'_ν respectivamente enumerados de menor a mayor se tienen las relaciones de entrelazamiento

$$\begin{aligned} \nu &\leq \eta_{\nu,1} < \xi_{\nu,1} < \eta_{\nu,2} < \xi_{\nu,2} < \dots; \\ \xi_{\nu,1} &< \xi_{\nu+1,1} < \xi_{\nu,2} < \xi_{\nu+1,2} < \dots. \end{aligned}$$

Además si b y a son constantes reales la ecuación

$$(32) \quad bJ_\nu(x) + axJ'_\nu(x) = 0$$

tiene denumerablemente infinitas raíces positivas $\{\mu_{\nu,k} : k = 1, 2, \dots\}$ y se tiene

$$\int_0^1 x J_\nu(\mu_{\nu,k}x) J_\nu(\mu_{\nu,k'}x) dx = \begin{cases} 0 & , \text{ si } k \neq k' \\ (J'_\nu(\mu_{\nu,k}))^2/2 & , \text{ si } k = k' \text{ y } a = 0 \\ \frac{(b/a)^2 + \mu_{\nu,k}^2 - \nu^2}{2\mu_{\nu,k}^2} (J_\nu(\mu_{\nu,k}))^2 & , \text{ si } k = k' \text{ y } a \neq 0 \end{cases}$$

Obtenemos entonces los siguientes autovalores y autofunciones:

- (D) $\lambda_{\ell,k} = (\xi_{\ell+1/2,k}/R)^2$ con $\ell \in \mathbb{N}$ y $k = 1, 2, \dots$. $u_{\ell,k}(\mathbf{x}) = j_\ell(\xi_{\ell+1/2,k}r/R)Y_\ell(\hat{\mathbf{x}})$.
- (N) $\lambda_{\ell,k} = (\eta_{\ell+1/2,k}/R)^2$ con $\ell \in \mathbb{N}$ y $k = 1, 2, \dots$. $u_{\ell,k}(\mathbf{x}) = j_\ell(\eta_{\ell+1/2,k}r/R)Y_\ell(\hat{\mathbf{x}})$.
- (R) Suponiendo que α es radial o sea $\alpha(R, \hat{\mathbf{x}}) = c > 0$: $\lambda_{\ell,k} = (\mu_{\ell+1/2,k}/R)^2$ donde $\mu_{\ell+1/2,k}$ son las raíces de (32) con $b = 1$ y $a = c/R$. $u_{\ell,k}(\mathbf{x}) = j_\ell(\mu_{\ell+1/2,k}r/R)Y_\ell(\hat{\mathbf{x}})$ donde Y_ℓ .

¹⁸

donde Y es cualquier función esférica no-nula de grado ℓ (hay $(2\ell+1)$ de estas linealmente independientes). Observamos que, en cada caso, las autofunciones explicitadas son ortogonales entre si ya que denotando con $\zeta_{\ell,k}$ los ceros que corresponden en cada caso:

$$\begin{aligned} \langle u_{\ell,k}, u_{\ell',k'} \rangle &= \int_0^R dr r^2 j_\ell(\zeta_{\ell,k}r/R) j_{\ell'}(\zeta_{\ell',k'}r/R) \int_{S^2} \overline{Y_\ell(\widehat{\mathbf{x}})} Y_{\ell'}(\widehat{\mathbf{x}}) d\sigma \\ &= \delta_{\ell,\ell'} \|Y_\ell\|^2 \frac{\pi R^2}{2} \int_0^1 t J_{\ell+1/2}(\zeta_{\ell,k}t) J_{\ell+1/2}(\zeta_{\ell,k'}t) dt \\ &= \delta_{\ell,\ell'} \delta_{k,k'} \frac{\pi R^2}{2} \|Y_\ell\|^2 \begin{cases} (J'_{\ell+1/2}(\xi_{\nu,k}))^2/2 & , \quad (D) \\ \frac{\eta_{\ell+1/2,k}^2 - (\ell+1/2)^2}{2\eta_{\ell+1/2,k}^2} (J_{\ell+1/2}(\eta_{\ell+1/2,k}))^2 & , \quad (N) \\ \frac{(R/c)^2 + \mu_{\ell+1/2,k}^2 - (\ell+1/2)^2}{2\mu_{\ell+1/2,k}^2} (J_{\ell+1/2}(\mu_{\ell+1/2,k}))^2 & , \quad (R) \end{cases} . \end{aligned}$$

¡Son un montón de autovalores y cada uno con multiplicidad no menor a $(2\ell+1)!$ La pregunta por otros autovalores se contesta negativamente con el resultado de que si elegimos los Y_ℓ como $Y_{\ell,m}$ con $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \ell$ donde $\{Y_{\ell,m} : m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \ell\}$ es linealmente independiente (por ejemplo $Y_{\ell,m} = Y_\ell^m$ los armónicos esféricos) entonces $\{u_{\ell,k,m}\}$ es un sistema ortogonal total¹⁹ en $L^2(B_R)$. Cada autovalor $\lambda_{\ell,k}$ tiene multiplicidad $2\ell+1$.

Continuamos con propiedades generales de los problemas (D),(N) y (R) en V . FALTA

20. 02/06: Clasificación y tipología de las EDP de segundo orden lineales; superficies características; formas canónicas

Vea las notas correspondientes an la w-página.

21. 04/06: Variables aleatorias; distribución (y densidad); medias (expectaciones)

Una sola variable real ξ : función distribución (de probabilidad) $F(x) = Prob\{\xi \leq x\}$. F es no-decreciente y continua a la derecha con $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$. F tiene toda la información en la medida que $Prob\{a < \xi \leq b\} = F(b) - F(a)$. Ejemplo: variable discreta con valores $x_1 < x_2 < \dots < x_N$ y probabilidades $p_k = Prob\{\xi = x_k\}$; gráfico (función escalera con saltos de magnitud p_k –discontinuos desde la izquierda– en los pto. x_k). Ejemplo $F(x) = 0$ para $x < 0$ y $F(x) = (1 - e^{-x/\lambda})$ para $x \geq 0$ (gráfico); en ese caso la derivada f existe salvo en $x = 0$ (pero la derivada a la derecha existe en todo punto) y se tiene $F(x) = \int_{-\infty}^x f(y) dy$; f se llama la *densidad de probabilidad* ya que $f(x) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} Prob\{x < \xi \leq x + \Delta\}/\Delta$.

Promedios y valores de expectación. En el caso acotado donde ξ tomavalores en un intervalo $[a, b]$ se consideran particiones

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$$

y el promedio

$$\sum_{j=1}^N t_j Prob\{x_{j-1} < \xi \leq x_j\} = \sum_{j=1}^N t_j [F(x_j) - F(x_{j-1})] ,$$

donde los t_j son puntos arbitrarios del j -ésimo intervalo $(x_{j-1}, x_j]$. En el límite de particiones infinitamente finas (Riemann) se obtiene la integral de Riemann-Stieltjes

$$\int_a^b x dF(x) .$$

¹⁹Esto es: las combinaciones lineales son densas

Se tiene consistentemente con la notación que $F(x) = \int_a^x dF(x)$. Cuando F admite la densidad f se tiene $\int_a^b x dF(x) = \int_a^b x f(x) dx$. Se define la media o valor esperado de la variable aleatoria ξ como

$$\mathbb{E}(\xi) := \int_a^b x dF(x).$$

de la misma manera que para integrales de Riemann impropias se interpreta a

$$\mathbb{E}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x)$$

cuando ξ no es acotada. Más generalmente

$$\mathbb{E}(\phi(\xi)) := \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dF(x)$$

cualquiera sea la función a valores reales definida en \mathbb{R} . Aquí $\phi(\xi)$ se entiende abstractamente como la variable aleatoria cuyos valores son $\phi(x)$. El k -ésimo momento de la distrib. F para $k = 0, 1, 2, \dots$ es el caso $\phi(x) = x^k$ (sobrentendiendo que $x^0 = 1$):

$$\mu_k := \mathbb{E}(\xi^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k dF(x).$$

¿Se puede determinar (univocamente) a F a partir de todos sus momentos (cuando estos son finitos)? El primer momento que tiene información sobre la dispersión (“ancho”) de la distribución es el segundo; mas precisamente la diferencia entre μ_2 y μ^2 donde $\mu := \mu_1$. Si consideramos $\phi(x) = (x - \mu)^2$ obtenemos

$$\mathbb{E}((\xi - \mu)^2) = \mathbb{E}(\xi^2 - 2\mu\xi + \mu^2) = \mu_2 - 2\mu^2 + \mu^2 = \mu_2 - \mu^2,$$

y como el miembro izquierdo es (manifiestamente) no-negativo $-\mu_2 \geq \mu^2$ — la *varianza* se define como

$$\sigma := \sqrt{\mu_2 - \mu^2}.$$

Es posible demostrar que (existiendo los dos primeros momentos de la distribución) $\sigma = 0$ si y sólo si la distribución es constante salvo en un punto x_o donde hay un salto de magnitud 1, i.e. $F(x) = H(x - x_o)$ donde H es la función de Heaviside²⁰. Este caso —llamado degenerado— es totalmente banal desde el punto de vista probabilístico pues la variable no es aleatoria ya que toma el valor x_o con probabilidad 1.

Otro caso para ϕ que tiene nombre propio: la *función característica* de la distribución F corresponde a $\phi(x) = e^{-i\lambda x}$ con λ real:

$$\chi(\lambda) := \mathbb{E}(e^{-i\lambda\xi}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} dF(x)$$

esto siempre es finito pues $|\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} dF(x)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} dF(x) = F(\infty) = 1$. Cuando F admite una densidad f se tiene $\chi = \sqrt{2\pi}\hat{f}$. En general F puede reconstruirse a partir de su función característica.

El paso a dos variables aleatorias ξ, η tiene aspectos novedosos (correlaciones).

$$F(x, y) = Prob\{\xi \leq x \& \eta \leq y\}.$$

Entonces $F(\infty, \infty) = 1$ y $F(x, -\infty) = F(-\infty, y) = 0$. Ahora la probabilidad para que el par (ξ, η) tome valores en un rectángulo es

$$\begin{aligned} (33) \quad Prob\{x_1 < \xi \leq x_2 \& y_1 < \eta \leq y_2\} &= F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) \\ &= \underbrace{[F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2)]}_{=Prob\{x_1 < \xi \leq x_2 \& \eta \leq y_2\}} - \underbrace{[F(x_2, y_1) - F(x_1, y_1)]}_{=Prob\{x_1 < \xi \leq x_2 \& \eta \leq y_1\}} \\ &= \underbrace{[F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1)]}_{=Prob\{\xi \leq x_2 \& y_1 < \eta \leq y_2\}} - \underbrace{[F(x_1, y_2) - F(x_1, y_1)]}_{=Prob\{\xi \leq x_1 \& y_1 < \eta \leq y_2\}}; \end{aligned}$$

²⁰Es costumbre expresar esto en términos de la densidad de probabilidad asociada δ_{x_o} .

observese que todas las probabilidades intervinientes son no-negativas. Es inmediato que, por ejemplo, $F(x_2, y_1) - F(x_1, y_1) = \text{Prob}\{\xi \leq x_1 \& y_1 < \eta \leq y_2\} \geq 0$ pues $F(x_2, y_1) = \text{Prob}\{\xi \leq x_2 \& \eta \leq y_1\} \geq \text{Prob}\{\xi \leq x_1 \& \eta \leq y_1\}$ ya que $x_1 < x_2$; así como $\text{Prob}\{\xi \leq x_2 \& y_1 < \eta \leq y_2\} \geq \text{Prob}\{\xi \leq x_1 \& y_1 < \eta \leq y_2\}$ por el mismo motivo. Inversamente si F definida en \mathbb{R}^2 toma valores en el intervalo $[0, 1]$ de modo que si $x_1 < x_2$ y $y_1 < y_2$ entonces –vease (33)

$$F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) \geq 0 ;$$

y, además, F es continua de la derecha en cada variable entonces F es una función distribución de un par de variables aleatorias. Para una función $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ se tiene

$$\mathbb{E}(\phi(\xi, \eta)) := \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x, y) dF(x, y) ,$$

con una definición de la integral de Stieltjes análoga al caso univariado. Si $(\partial^2 F / \partial x \partial y) = f$ existe entonces

$$\mathbb{E}(\phi(\xi, \eta)) := \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x, y) f(x, y) dx dy ,$$

y f es la *densidad de probabilidad* asociada con la distribución.

Las variables aleatorias se dicen *independientes* si la distribución F factoriza

$$F(x, y) = F_1(x)F_2(y) .$$

En este caso no hay correlación alguna entre las variables aleatorias; las probabilidades asociadas con una de estas variables son totalmente independientes de las probabilidades de la otra.

En general, podemos asociar a la distribución bivariada F las distribuciones monovariadas

$$F_1(x) = \text{Prob}\{\xi \leq x\} = F(x, \infty) , \quad F_2(y) = \text{Prob}\{\eta \leq y\} = F(\infty, y)$$

que son efectivamente las distribuciones de ξ y de η respectivamente. En el caso no-independiente $F(x, y) \neq F_1(x)F_2(y)$: ¡la información probabilista de cada una de las dos variables por separado no alcanza para especificar el comportamiento aleatorio del par!

Los momentos correspondientes son

$$\mu_{k, \ell} = \mathbb{E}(\xi^k \eta^\ell) , \quad k, \ell = 0, 1, 2, \dots .$$

Denotando las medias con $\mu_1 = \mu_{1,0}$ y $\mu_2 = \mu_{0,1}$ la (matriz de) covarianza es

$$\begin{aligned} \rho_{1,1} &:= \mathbb{E}((\xi - \mu_1)^2) = \sigma_1^2 , & \rho_{2,2} &:= \mathbb{E}((\eta - \mu_2)^2) = \sigma_2^2 , \\ \rho_{1,2} &= \rho_{2,1} := \mathbb{E}((\xi - \mu_1)(\eta - \mu_2)) = \mu_{1,1} - \mu_1 \mu_2 , \end{aligned}$$

lo que se organiza a la matriz (2×2)

$$C := \begin{pmatrix} \rho_{1,1} & , & \rho_{1,2} \\ \rho_{2,1} & , & \rho_{2,2} \end{pmatrix} .$$

Esta es positiva semi-definida en la medida que σ_1^2 y σ_2^2 son números no-negativos y –por la desigualdad de Cauchy-Schwarz– $|\rho_{1,2}| \leq \sqrt{\rho_{1,1}\rho_{2,2}}$ de modo que $\det(C) = \rho_{1,1}\rho_{2,2} - \rho_{1,2}^2 \geq 0$. Cuando $\rho_{1,1}\rho_{2,2} > 0$ (ambas variables son no-degeneradas²¹) se acostumbra definir el coeficiente de correlación

$$\rho := \frac{\rho_{1,2}}{\sqrt{\rho_{1,1}\rho_{2,2}}}$$

que cae en el intervalo $[-1, 1]$. Es de notar que cuando las variables son independientes se tiene $\mu_{1,1} = \mu_1 \mu_2$ y por ende $\rho_{1,2} = \rho = 0$. Pero la condición $\rho = 0$ no es suficiente para la independencia como se ve en el ejemplo:

$$f(x, y) = \begin{cases} (1/4\pi) & , \quad \text{si } x^2 + y^2 < 1 \\ 0 & , \quad \text{si } x^2 + y^2 \geq 1 \end{cases} ,$$

²¹si una de ellas es degenerada entonces hay independencia y $\rho_{1,2} = 0$.

tomando esta función como la densidad de una distribución.

Pasar de 2 a muchas variables aleatorias no trae nada nuevo:

$$F(\mathbf{x}) := \text{Prob}\{\xi_j \leq x_j \text{ para } j = 1, 2, \dots, n\}.$$

Considere los hipercubos²²

$${}_a\Box^b := \{\mathbf{x} : a_j < x_j \leq b_j\}.$$

Los vértices son aquellos vectores \mathbf{v} con $v_j = a_j$ o $v_j = b_j$ para todo $j = 1, 2, \dots, n$. Hay entonces 2^n vértices. Introduciendo $\#(\mathbf{v})$ como el número de componentes a_j del vértice \mathbf{v} se obtiene la versión multi-dimensional de (33):

$$\text{Prob}\{\xi \in {}_a\Box^b\} = \sum_{\{\text{vértices } \mathbf{v}\}} (-1)^{\#(\mathbf{v})} F(\mathbf{v}) =: F({}_a\Box^b),$$

que nos permite determinar la probabilidad de que el vector aleatorio ξ caiga en el hipercubo ${}_a\Box^b$ y, via cubrimientos con hipercubos y pasaje a un límite, la probabilidad de que caiga en cualquier subconjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ suficientemente regular.

Nuevamente una distribución de probabilidad multi-variada F es un mapa de \mathbb{R}^n en el intervalo $[0, 1]$ tal que

$$F({}_a\Box^b) \geq 0, \quad \forall {}_a\Box^b,$$

con $F(\infty, \infty, \dots, \infty) = 1$ y $F(\mathbf{x}) = 0$ si $x_j = -\infty$ para algún j . Además F debe ser superiormente semi-continua (continua de la derecha en cada variable).

22. 16/06: Distribuciones particularmente importantes: Normal, binomial y de Poisson

Recapitulación del caso de dos variables aleatorias e introducción de las distribuciones marginales (que se habían olvidado la clase pasada).

Distribución normal (y normalizada)

$$\Phi(x) := (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt$$

con densidad

$$\phi(x) = e^{-x^2/2} / \sqrt{2\pi};$$

Los momentos son

$$\mu_k = \begin{cases} 0 & , \text{ para } k \text{ impar} \\ 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (k-1) & , \text{ para } k \text{ par} \end{cases};$$

en particular $\mu = \mu_1 = 0$ y $\sigma = \sqrt{\mu_2} = 1$.

Renormalización de una distribución F arbitraria con primer y segundo momento finitos: $\eta := (\xi - \mu_1)/\sigma$; en ese caso $\mathbb{E}(\eta) = 0$ y $\mathbb{E}(\eta^2) = 1$.

En general la variable ξ se dice normalmente distribuida si

$$F(x) = \Phi((x - \mu)/\sigma) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{(x-\mu)/\sigma} e^{-t^2/2} dt = (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \int_{-\infty}^x e^{-(s-\mu)^2/2\sigma^2} ds,$$

donde μ es real arbitrario y σ es real positivo arbitrario. En ese caso $\mathbb{E}(\xi) = \mu$ y $\mathbb{E}((\xi - \mu)^2) = \sigma^2$. La densidad asociada es $(2\pi\sigma^2)^{-1/2} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$; esta es simétrica y decae muy rápidamente para $|x| \rightarrow \infty$. Por ejemplo:

$$\text{Prob}\{-0,67449 \leq \xi \leq 0,67449\} = 1/2.$$

²²Observe que si \mathbf{c} y \mathbf{d} son vectores para los cuales $d_j \geq c_j$ para algún $j = 1, 2, \dots, n$ entonces ${}_c\Box^d = \emptyset$.

Distribución de Poisson. Se llama así la distribución discreta pero infinita donde la variable aleatoria ξ puede tomar valores x_k ($k \in \mathbb{N}$) con probabilidad

$$Prob\{\xi = x_k\} = \lambda^k e^{-\lambda} / k!,$$

donde $\lambda > 0$ es una constante.

FALTA aprox. Poisson a la distrib. binomial.

23. 18/06: Leyes de grandes números

Repetición independiente n veces de un “evento” (“experimento”) cuyo resultado es “sí” (S) o “no” (N) con probabilidad p y $q := 1 - p$ respectivamente. Hay 2^n posibles resultados dados por sucesiones como $SNNSSSNNSNNSNSNS \dots$; la probabilidad de esta sucesión es

$$Prob\{SNNSSSNNSNNSNSNS \dots\} = pqppppppqqpppppp \dots$$

o sea $p^k q^{n-k}$ donde k es la cantidad de S en la sucesión (y $n - k$ la cantidad de N). Si solo interesa la cantidad k de S en el resultado entonces deben tenerse en cuenta las $\binom{n}{k}$ maneras de elegir los k “sitios” de los n posibles donde aparecen estas S . La distribución de probabilidad asociada es la llamada distribución binomial construida a partir de las probabilidades

$$p_n(k) := \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Conviene introducir la variable aleatoria Σ_n que es el número de S en n repeticiones. Se tiene para x real

$$Prob\{\Sigma_n \leq x\} = \begin{cases} \sum_{k=0}^{[x]} p_n(k) & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases},$$

donde

$$[x] := \max\{j \in \{0, 1, 2, \dots, n\} : j \leq x\}.$$

La expectativa es que

$$(34) \quad \frac{\Sigma_n}{n} \longrightarrow p, \quad \text{para } n \rightarrow \infty.$$

Más allá de que hay que ser consciente de que estamos en un terreno complicado desde el punto de vista filosófico y quizás tautológico, este resultado nos permite intentar una definición operacional para la “probabilidad” p en la cual se basa la interpretación inocente y usual de p como una frecuencia. En todo caso es cierto que cualquiera sea $\epsilon > 0$,

$$Prob\left\{\left|\frac{\Sigma_n}{n} - p\right| \leq \epsilon\right\} = Prob\left\{-\epsilon \leq \frac{\Sigma_n}{n} - p \leq \epsilon\right\} = Prob\{np - n\epsilon \leq \Sigma_n \leq np + n\epsilon\}$$

$$= Prob\{\Sigma_n \leq np + n\epsilon\} - Prob\{\Sigma_n < np - n\epsilon\} = 1 - Prob\{\Sigma_n > np + n\epsilon\} - Prob\{\Sigma_n < np - n\epsilon\}.$$

Para demostrar que

$$(35) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} Prob\left\{\left|\frac{\Sigma_n}{n} - p\right| \leq \epsilon\right\} = 1,$$

que es una versión precisa de (34) que se conoce con el nombre de “Ley de grandes números clásica” debemos estimar $Prob\{\Sigma_n < r\}$ y $Prob\{\Sigma_n > r\}$.

Lema 4

$$Prob\{\Sigma_n > r\} \leq \frac{rq}{(r - np)^2},$$

$$Prob\{\Sigma_n < r\} \leq \frac{(n - r)p}{(r - np)^2}.$$

Demostración: ■

Entonces reconsiderando $Prob\left\{\left|\frac{\Sigma_n}{n} - p\right| \leq \epsilon\right\}$, tenemos

$$0 \leq Prob\{\Sigma_n > np + n\epsilon\} \leq \frac{n(p + \epsilon)q}{n^2\epsilon^2} = \frac{(p + \epsilon)q}{n\epsilon^2},$$

$$0 \leq Prob\{\Sigma_n < np - n\epsilon\} \leq \frac{n(q + \epsilon)p}{n^2\epsilon^2} = \frac{(q + \epsilon)p}{n\epsilon^2},$$

de modo que ambas probabilidades tienden a cero para $n \rightarrow \infty$, lo que completa la demostración de (35).

Aproximación de Poisson. Consideramos $n \rightarrow \infty$ y $p \rightarrow 0$ pero con $np = \lambda$ fijo. Entonces

$$p_n(0) = q^n = (1 - p)^n = (1 - \lambda/n)^n \rightarrow e^{-\lambda}.$$

Se tiene

$$\frac{p_n(k+1)}{p_n(k)} = \frac{p(n-k)}{q(k+1)}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1;$$

de modo que

$$p_n(1) = p_n(0) \frac{pn}{q} \rightarrow e^{-\lambda} \lambda,$$

$$p_n(2) = p_n(1) \frac{pn-p}{2q} \rightarrow e^{-\lambda} \lambda(\lambda/2),$$

$$p_n(k) \rightarrow e^{-\lambda} \lambda^k / k!.$$

En este límite particular la distribución tiende a la distribución de Poisson para Σ_n con valores $x_k = k$ para $k \in \mathbb{N}$.

Aproximación normal. Se tiene el

Teorema 23.1 *Teorema de De Moivre-Laplace.* Si $x_1 < x_2$ entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Prob\{np + x_1\sqrt{npq} \leq \Sigma_n \leq np + x_2\sqrt{npq}\} = \Phi(x_2) - \Phi(x_1).$$

Si se introduce la variable aleatoria normalizada $\widehat{\Sigma}_n := (\Sigma_n - np)/\sqrt{npq}$ el Teorema de De Moivre-Laplace dice que en el límite $n \rightarrow \infty$ esta variable aleatoria está normalmente distribuida con media nula y varianza 1.

“Ley de los grandes números”. Podemos ver a Σ_n como suma de variables aleatorias independientes $\{\xi_k : k = 1, 2, \dots\}$ cada una de las cuales toma el valor 1 (con probabilidad p) si en la k -ésima repetición el resultado es S y el valor 0 si en dicha repetición el resultado es N . Entonces $\Sigma_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$.

Generalizando, podemos considerar una sucesión $\{\xi_k : k = 1, 2, \dots\}$ de variables aleatorias ξ_k independientes y todas con la misma distribución de media $\mu := \mathbb{E}(\xi_k)$ finita. Entonces, para todo $\epsilon > 0$, se tiene la “Ley de grandes números”²³

Teorema 23.2

$$(36) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} Prob\left\{\left|\frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{n} - \mu\right| > \epsilon\right\} = 0.$$

Como generalización del Teorema de De Moivre-Laplace se tiene el

Teorema 23.3 *Teorema del Límite Central.* Si tanto la media μ como la varianza σ de las variables aleatorias $\{\xi_k\}$ independientes y idénticamente distribuidas son finitas entonces para $x \in \mathbb{R}$ se tiene

$$(37) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} Prob\left\{\frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \leq x\right\} = \Phi(x).$$

²³Generalización de (35).

Una pregunta natural es que sucede con estos resultados si las variables aleatorias ξ_k son independientes pero cada una tiene su propia distribución de media $\mu_k = \mathbb{E}(\xi_k)$ finita y varianza $\sigma_k = \sqrt{\mathbb{E}((\xi_k - \mu_k)^2)}$ finita. En tal caso la variable aleatoria suma $\Sigma_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ tiene media $m_n = \sum_{k=1}^n \mu_k$ y varianza

$$s_n = \sqrt{\sum_{k=1}^n \sigma_k^2}.$$

La ley de los grandes números se convierte en:

$$(38) \quad \text{Prob} \left\{ \left| \frac{\Sigma_n - m_n}{n} \right| > \epsilon \right\} \rightarrow 0;$$

y el Teorema del Límite Central en:

$$(39) \quad \text{Prob} \left\{ x_1 \leq \frac{\Sigma_n - m_n}{s_n} \leq x_2 \right\} \rightarrow \Phi(x_2) - \Phi(x_1).$$

Comentamos solamente que:

- (38) es válido si las variables aleatorias ξ_k son uniformemente acotadas, i.e., $|\xi_k| \leq C$ para $k = 1, 2, \dots$; o bien también cuando $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n/n = 0$.
- (39) se cumple bajo una condición de crecimiento (que también es necesaria) sobre las varianzas

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n^{-2} \sum_{\{k=1,2,\dots,n: |\xi_k - \mu_k| \leq \epsilon s_n\}} \sigma_k^2 = 1, \text{ cualquiera sea } \epsilon > 0.$$

Referencia (inmejorable) para todo lo de hoy: W. Feller: *An Introduction to Probability Theory and Its Applications. Volume I* J. Wiley & Sons, New York 1968.