Electromagnetismo II

FAMAF-UNC

Guía 1 – 19 de agosto de 2017

Tema: Tratamiento general introductorio de las ecuaciones de Maxwell. Potenciales. Invariancias de gauge. Simetrías. Impulso y energía del campo electromagnético. Tensor de tensiones de Maxwell.

Problema 1: Considere N cargas puntuales q_i moviéndose en trayectorias arbitrarias. Demuestre explícitamente que se cumple la ecuación de continuidad para este sistema.

Problema 2: Demuestre que en el gauge de Lorenz la libertad de gauge no está fijada completamente: se puede sumar una solución homogénea de la ecuación de ondas.

Problema 3: Considere las ecuaciones de Maxwell con fuentes en vacío. Demuestre que como consecuencia de estas ecuaciones los campos $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ satisfacen ecuaciones de ondas.

Problema 4: Demuestre la unicidad de soluciones de la ecuaciones de Maxwell con fuentes utilizando el teorema de Poynting (la conservación de la energía) y bajo apropiadas condiciones de contorno o asintóticas.

Problema 5: Demuestre que si las ecuaciones de vínculo (con fuentes) se satisfacen en un cierto tiempo entonces se satisfacen a todo tiempo como consecuencia de las ecuaciones de evolución.

Problema 6: Utilizando el teorema de existencia dado en el teórico, demuestre que a partir de campos $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ iniciales sin fuente y soporte compacto que cumplan las ecuaciones de vínculo, se genera necesariamente una solución de las ecuaciones de Maxwell que no tiene fuente en ningún punto del espacio, tiene soporte compacto para todo tiempo, y tiene energía finita.

Problema 7: Demuestre que las ecuaciones de Maxwell tienen las siguientes simetrías: (1) Traslación espacial; (2) Inversión temporal.

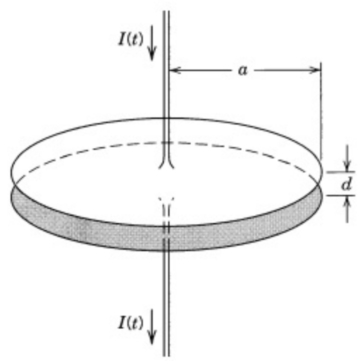
Problema 8: Demostrar que las ecuaciones de vínculo de Maxwell son invariantes frente a rotaciones.

Problema 9: Considere un segmento de longitud L de un alambre recto infinito de radio a y conductividad σ por donde circula una corriente I. Asuma que dentro del alambre se satisface la ley de Ohm $\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E}$. Demuestre que el flujo del vector de Poynting en la superficie del alambre está dado por $I^2 R$.
Interprete este resultado en términos de la conservación de la energía.

Problema 10: Una esfera de constante dieléctrica ϵ y radio a que se encuentra en un campo homogéneo exterior $\boldsymbol{E}$ está dividida en dos mitades por un plano perpendicular a la dirección del campo. Utilizando el tensor de energía momento, determinar la fuerza de atracción entre los dos hemisferios.

Problema 11: Considere una esfera de material ferromagnético de radio R, que tiene una magnetización uniforme $\boldsymbol{M}$ en la dirección z, y además tiene una carga Q y masa m (densidad uniforme). La esfera está inicialmente en reposo. Suponga que luego la magnetización desaparece. Esto se puede conseguir, por ejemplo, calentando la esfera sobre la temperatura de Curie. Calcule la velocidad de rotación de la esfera cuando la magnetización desaparece. Disculta la conservación de la cantidad de movimiento angular.

Problema 12: Un capacitor ideal de placas circulares planas de radio a y separación entre las placas $d << a$ está conectado a una fuente de corriente alterna por conductores axiales como se muestra en la figura. La corriente que circula por el cable está dada por $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$.
a) Calcule los campos eléctrico y magnético entre las placas (despreciando totalmente efectos de borde) a partir de la aproximación cuasi estática, corrigiéndola hasta segundo orden en potencias de la frecuencia (o de a/λ).
b) Corrobore sus resultados a partir de resolver la ecuación de ondas para el potencial vector en el gauge de Coulomb.



Problema 13: Una onda electromagnética plana dada por $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{e}_1 E_0 \cos(kz - wt)$, $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{e}_2 B_0 \cos(kz - wt)$ incide en el vacío sobre una pantalla perfectamente absorbente ($\boldsymbol{e}_1$ y $\boldsymbol{e}_2$ son los versores correspondientes a los ejes x e y respectivamente).
a) A partir de la ley de conservación del momento lineal, encuentre la presión en un ciclo (llamada presión de radiación) ejercida por la onda sobre la superficie en condiciones de incidencia normal . Por cálculo explícito muestre también que es igual a la densidad volumétrica de energía del campo electromagnético de la onda. Calcule cómo debe ser la fuerza por unidad de superficie si la incidencia es oblicua con ángulo de incidencia θ.
b) Encuentre las componentes del tensor de Maxwell y utilícelas para corroborar sus afirmaciones anteriores.
b) En la vecindad de la Tierra, el flujo de energía electromagnética proveniente del Sol es aproximadamente $1{,}4kW/m^2$. Si un velero interplanetario tiene una vela cuya densidad es de $1g/m^2$, y despreciando toda otra masa, calcule la máxima aceleración que podría adquirir debido a la presión de radiación solar. Compare con las características de la aceleración que podría deberse al viento solar.