Electromagnetismo II

FAMAF-UNC

Guía 2

1 de septiembre de 2017

Tema: Ondas. Propiedades básicas de ondas electromagéticas planas. Descripción de las mismas en distintos gauges.

Problema 1: Sea $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{E}_0 f(\phi)$ un campo vectorial con $\boldsymbol{E}_0$ un vector constante y $f(\phi)$ una función arbitraria dependiente del argumento $\phi = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t$ con $\boldsymbol{k}$ un vector constante. Suponiendo que $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ representa un campo eléctrico solución a las ecuaciones de Maxwell de vacio libre de fuentes, determine el campo magnético asociado y las relaciones que se deben satisfacer entre $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$ y ω.

Problema 2: Considere campos electromagnéticos en el vacío en una región libre de fuentes.

a) A partir de la solución tipo onda plana $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{A}_0 f(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t)$ en el gauge de Lorenz, donde $\boldsymbol{A}_0$ e un vector constante arbitrario, calcule los correspondientes campos $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$.

b) Transforme los potenciales al gauge de Coulomb y encuentre los mismos campos trabajando en este gauge.

Problema 3: Demuestre que para campos electromagnéticos en el vacío y libre de fuentes siempre se puede elegir potenciales en el gauge de Coulomb $(\boldsymbol{A}_c, \phi_c)$ tales que $\phi_c = 0$. Demuestre también que con dicha elección el potencial $\boldsymbol{A}_c$ satisface la ecuación de onda $\nabla^2 \boldsymbol{A}_c - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}_c}{\partial t^2} = 0$.

Problema 4: Considere la onda plana circularmente polarizada obtenida a partir del potencial vector $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) = A_0\left(\hat{\mathbf{x}}\cos(kz-\omega t) \pm \hat{\mathbf{y}}\sin(kz-\omega t)\right)$, donde A_0 es una constante.

a) Obtenga los campos $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ para el vacío.

b) Determine las ubicaciones relativas de los vectores $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{A}$.

c) Encuentre la densidad de impulso transportada por la onda en cada caso.

Problema 5:

a) Escriba una expresión para el campo eléctrico de dos ondas planas de la misma frecuencia y amplitud que se propagan en sentidos opuestos en la dirección del eje z. El campo eléctrico de ambas ondas está polarizado en la dirección y. La fase de ambas ondas es la misma en $t = 0$ en $z = 0$.

b) Encuentre el campo magnético correspondiente.

c) Calcule la densidad de energía eléctrica y magnética instantánea y promedio. Calcule además la densidad de flujo de energía instantánea y promedio.

Suponga ahora que las dos ondas que se propagan en sentidos opuestos en el eje z tienen polarizaciones lineales perpendiculares entre sí.

d) Determine el estado de polarización en función de z. Analícelo y descríbalo gráficamente.

e) Calcule el vector de Poynting instantáneo y promedio en función de z.

Problema 6: Dos ondas monocromáticas polarizadas linealmente y de la misma frecuencia se propagan a lo largo del eje z. La primer onda está polarizada a lo largo del eje x y tiene una amplitud a, y la segunda está polarizada a lo largo del eje y y tiene amplitud b.
La fase de la segunda está adelantada con respecto a la primera en ξ.

a) Encuentre la polarización de la onda resultante.

b) Analice la dependencia de la polarización con la diferencia de fase ξ cuando $a = b$.

Problema 7: (Problema de estudio: Ondas evanescentes) Cuando una onda electromagnética plana incide sobre la interfase entre dos medios dieléctricos desde el medio de mayor índice de refracción con un ángulo de incidencia mayor que el crítico, se produce el fenómeno conocido como *reflexión total interna*, consistente en que no existe onda transmitida, y la onda se refleja en la mencionada interfase con el 100 % de su intensidad y energía.
La explicación de la inexistencia de la onda transmitida en estas condiciones puede encontrarse en el hecho de que cuando el ángulo de incidencia supera al crítico, *la fase de los campos se propaga por la interfase* con cierta longitud de onda λ^* que resulta menor que la longitud de onda λ_0 con la cual podría propagarse esta onda en este medio (el de menor índice de refracción), y debido a esto los requisitos de continuidad en la interfase obligarían a la onda transmitida a viajar con una longitud de onda menor o igual que λ^*, o sea menor que λ_0, propagación que no permiten las ecuaciones de Maxwell a través de las ecuaciones de onda que se desprenden de ellas.
No obstante, los mencionados requisitos de continuidad exigen la existencia de campos en el medio aludido, y en este problema trataremos de visualizar cómo es la propagación que permiten las mencionadas ecuaciones.

Para ello considere la siguiente situación: Sea una interfase de separación entre medios dieléctricos definida por el plano $z = 0$. El medio de mayor índice de refracción está en $z < 0$, y desde él incide una onda electromagnética plana de manera tal que el plano de incidencia es el plano $z = 0$. La frecuencia de esta onda es ω_0, y su longitud de onda en el medio de menor índice de refracción ($z > 0$), en caso de poder propagarse en él, sería λ_0. Y para evitar confusiones en el desarrollo que sigue definiremos $k_0 = \omega_0/c = 2\pi/\lambda_0$ (correspondiente al hipotético caso de una propagación en este medio, que no tendrá lugar en este planteo).

a) Considerando que los campos se propagarán por la interfase con un vector de onda $\boldsymbol{k}^*$ cuyo módulo es $k^* > k_0$ en la dirección positiva del eje y, muestre que en la región $z > 0$ el campo eléctrico dado por

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = \left(\hat{\boldsymbol{x}} E_1 \cos(k^* y - \omega_0 t + \phi) - \hat{\boldsymbol{y}} \frac{a}{k^*} E_2 \cos(k^* y - \omega_0 t) + \hat{\boldsymbol{z}} E_2 \sin(k^* y - \omega_0 t)\right) e^{-az},$$

es permitido por las ecuaciones de Maxwell (*onda evanescente*), donde E_1 y E_2 son valores arbitrarios de campo eléctrico, a es una constante positiva con unidades de distancia^{-1}, y ϕ es una fase arbitraria. Encuentre el valor de a (en función de k^* y ω_0), determine el correspondiente campo magnético, y muestre también que las ecuaciones de Maxwell permiten valores arbitrarios para E_1, E_2 y ϕ (los cuales sólo quedarían fijados en cada caso particular por las condiciones de continuidad en la interfase).

b) Muestre que las expresiones generales halladas para los campos pueden presentarse como combinación lineal de dos modos básicos: uno con campo eléctrico transversal, y otro con campo magnético transversal. Encuentre cualitativamente la forma de las lineas de campo de cada modo. Encuentre también qué modo de polarización de la onda incidente (desde $z < 0$) da lugar a cada uno de estos modos en $z > 0$.

c) Encuentre el comportamiento de estos campos cuando el ángulo de incidencia tiende exactamente al valor del ángulo crítico.

d) Obtenga todos los resultados anteriores a partir de considerar la expresión compleja:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = \left[\hat{\mathbf{x}} E_1 e^{i\phi} + \left(\frac{-a}{k^*} \hat{\mathbf{y}} - i\hat{\mathbf{z}} \right) E_2 \right] e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega_0 t)},$$

donde $E_1, E_2, k^*, a,$ y ϕ, son valores reales, mientras $\boldsymbol{k} = k^* \hat{\mathbf{y}} + ia\hat{\mathbf{z}}$.

<u>Nota aclaratoria:</u> Note que la existencia de esta onda no está limitada a $z > 0$: nuestro enunciado la limita al hemiespacio superior, pero la interfase que le da origen podría ser cualquier plano $z = \text{cte} < 0$, y podrían concebirse otras condiciones de contorno con las cuales la onda evanescente no estaría limitada a ninguna región particular preestablecida por las ecuaciones de Maxwell.